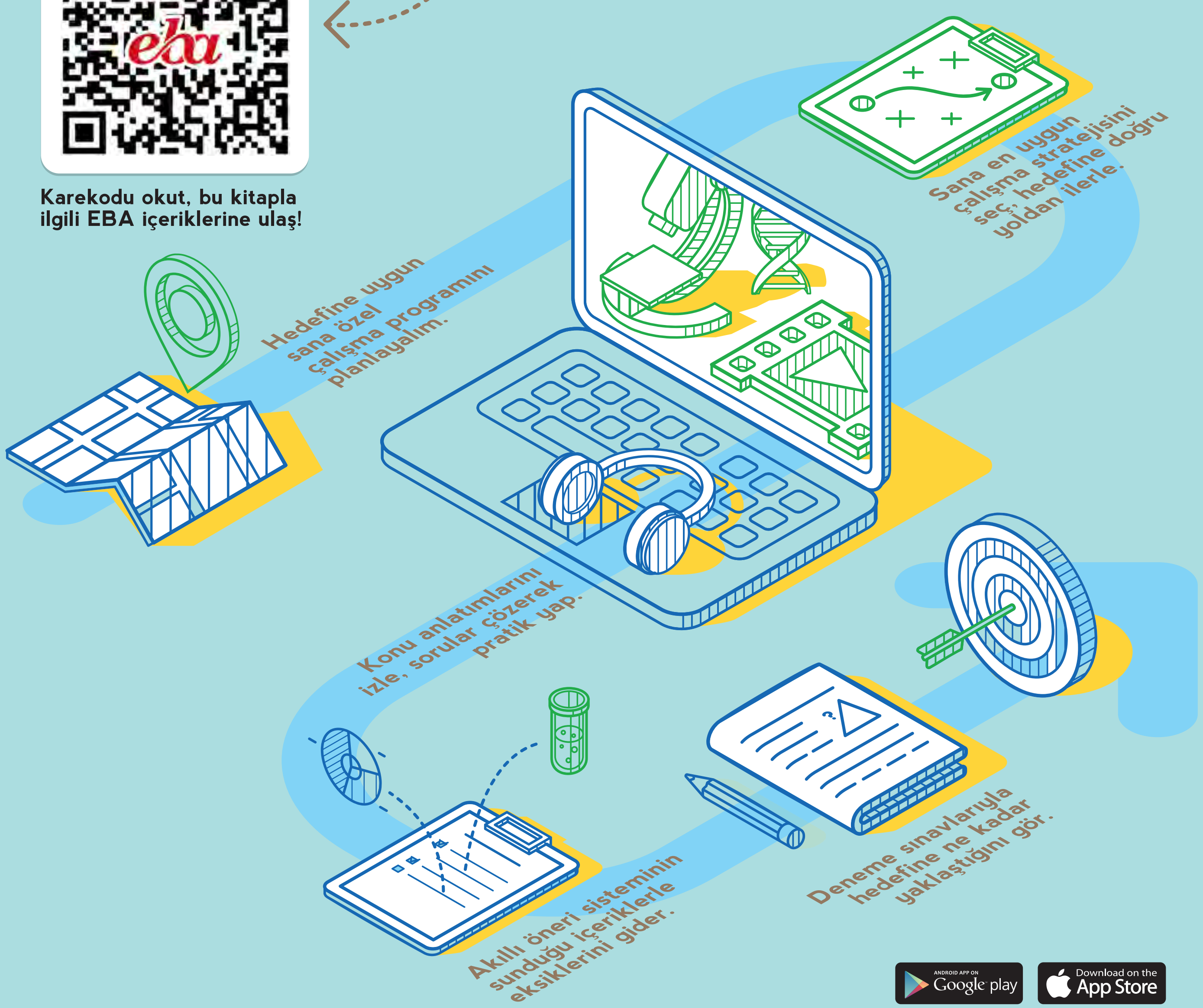
Bu kitaba sığmayan daha neler var!

Karekodu okut, bu kitapla ilgili EBA içeriklerine ulaş!



BU DERS KİTABI MİLLÎ EĞİTİM BAKANLIĞINCA ÜCRETSİZ OLARAK VERİLMİŞTİR.
PARA İLE SATILAMAZ.

ISBN: 978-975-11-7913-5

Bandrol Uygulamasına İlişkin Usul ve Esaslar Hakkında Yönetmeliğin Beşinci Maddesinin İkinci Fıkrası Çerçevesinde Bandrol Taşıması Zorunlu Değildir.

MESLEKİ EĞİTİM MERKEZİ **MATEMATİK** **12. SINIF** DERS KİTABI

T.C. MİLLÎ EĞİTİM BAKANLIĞI | ORTAÖĞRETİM | DERS KİTABI

MESLEKİ EĞİTİM MERKEZİ

MATEMATİK 12

MESLEKİ EĞİTİM MERKEZİ

MATEMATİK

12

DERS KİTABI

YAZARLAR

Gökhan GÜNEŞ
Melike KARABULUT
Vedat GÜLMEZ
İlknur DOĞAN

Millî Eğitim Bakanlığı Genel Yayın Numarası ....: 9334
Yardımcı Ve Kaynak Kitaplar Dizi Numarası ....: 2994

HAZIRLAYANLAR

Editör
Prof. Dr. Ali GÜVEN

Dil Uzmanı
Duygu TAYHANİ KUŞ

Program Geliştirme Uzmanı
Prof. Dr. Erdoğan TEZCİ

Rehberlik ve Psikolojik Danışmanlık Uzmanı
İlyas TİPİ

Görsel Tasarım Uzmanı
Sertan AKSAKAL

Grafik Tasarım Uzmanı
Rahman ÖZDEMİR

Bu kitap Mesleki Eğitim Merkezleri diploma fark derslerine yönelik 12. sınıf, 3 saatlik matematik dersi için hazırlanmıştır.

ISBN: 978-975-11-7913-5

Millî Eğitim Bakanlığı, Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığının 04.10.2023 gün ve 86058795 sayılı yazısı ile eğitim aracı olarak kabul edilmiştir.

İSTİKLÂL MARŞI

Korkma, sönmez bu şafaklarda yüzen al sancak;
Sönmeden yurdumun üstünde tüten en son ocak.
O benim milletimin yıldızıdır, parlayacak;
O benimdir, o benim milletimindir ancak.

Çatma, kurban olayım, çehreni ey nazlı hilâl!
Kahraman ırkıma bir gül! Ne bu şiddet, bu celâl?
Sana olmaz dökülen kanlarımız sonra helâl.
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl.

Ben ezelden beridir hür yaşadım, hür yaşarım.
Hangi çılgın bana zincir vuracakmış? Şaşarım!
Kükremiş sel gibiyim, bendimi çiğner, aşarım.
Yırtarım dağları, enginlere sığmam, taşarım.

Garbın âfâkını sarmışsa çelik zırhlı duvar,
Benim iman dolu göğsüm gibi serhaddim var.
Ulusun, korkma! Nasıl böyle bir imanı boğar,
Medeniyyet dediğin tek dişi kalmış canavar?

Arkadaş, yurduma alçakları uğratma sakın;
Siper et gövdeni, dursun bu hayâsızca akın.
Doğacaktır sana va'dettiği günler Hakk'ın;
Kim bilir, belki yarın, belki yarından da yakın.

Bastığın yerleri toprak diyerek geçme, tanı:
Düşün altındaki binlerce kefensiz yatanı.
Sen şehit oğlusun, incitme, yazıktır, atanı:
Verme, dünyaları alsan da bu cennet vatanı.

Kim bu cennet vatanın uğruna olmaz ki feda?
Şüheda fışkıracak toprağı sıksan, şüheda!
Cânı, cânânı, bütün varımı alsın da Huda,
Etmesin tek vatanımdan beni dünyada cüda.

Ruhumun senden İlâhî, şudur ancak emeli:
Değmesin mabedimin göğsüne nâmahrem eli.
Bu ezanlar -ki şehadetleri dinin temeli-
Ebedî yurdumun üstünde benim inlemeli.

O zaman vecd ile bin secde eder -varsa- taşım,
Her cerîhamdan İlâhî, boşanıp kanlı yaşım,
Fışkırır ruh-ı mücerret gibi yerden na'şım;
O zaman yükselerek arşa değer belki başım.

Dalgalan sen de şafaklar gibi ey şanlı hilâl!
Olsun artık dökülen kanlarımın hepsi helâl.
Ebediyyen sana yok, ırkıma yok izmihlâl;
Hakkıdır hür yaşamış bayrağımın hürriyyet;
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl!

Mehmet Âkif Ersoy

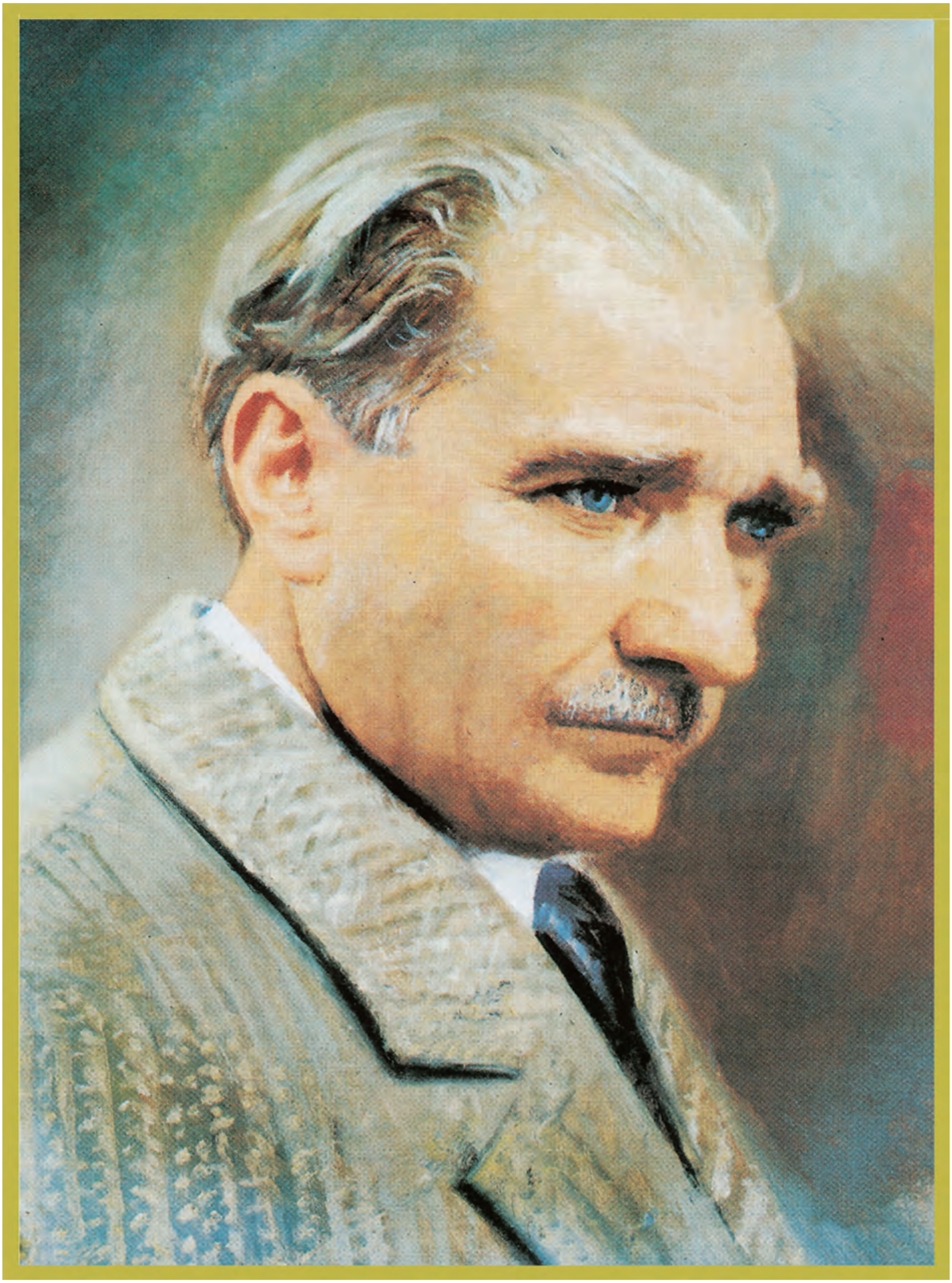
GENÇLİĞE HİTABE

Ey Türk gençliği! Birinci vazifen, Türk istiklâlini, Türk Cumhuriyetini, ilelebet muhafaza ve müdafaa etmektir.

Mevcudiyetinin ve istikbalinin yegâne temeli budur. Bu temel, senin en kıymetli hazinendir. İstikbalde dahi, seni bu hazineden mahrum etmek isteyecek dâhilî ve hâricî bedhahların olacaktır. Bir gün, istiklâl ve cumhuriyeti müdafaa mecburiyetine düşersen, vazifeye atılmak için, içinde bulunacağın vaziyetin imkân ve şeraitini düşünmeyeceksin! Bu imkân ve şerait, çok namüsait bir mahiyette tezahür edebilir. İstiklâl ve cumhuriyetine kastedecek düşmanlar, bütün dünyada emsali görülmemiş bir galibiyetin mümessili olabilirler. Cebren ve hile ile aziz vatanın bütün kaleleri zapt edilmiş, bütün tersanelerine girilmiş, bütün orduları dağıtılmış ve memleketin her köşesi bilfiil işgal edilmiş olabilir. Bütün bu şeraitten daha elîm ve daha vahim olmak üzere, memleketin dâhilinde iktidara sahip olanlar gaflet ve dalâlet ve hattâ hıyanet içinde bulunabilirler. Hattâ bu iktidar sahipleri şahsî menfaatlerini, müstevlîlerin siyasî emelleriyle tevhit edebilirler. Millet, fakr u zaruret içinde harap ve bîtap düşmüş olabilir.

Ey Türk istikbalinin evlâdı! İşte, bu ahval ve şerait içinde dahi vazifen, Türk istiklâl ve cumhuriyetini kurtarmaktır. Muhtaç olduğun kudret, damarlarındaki asil kanda mevcuttur.

Mustafa Kemal Atatürk



MUSTAFA KEMAL ATATÜRK

İÇİNDEKİLER

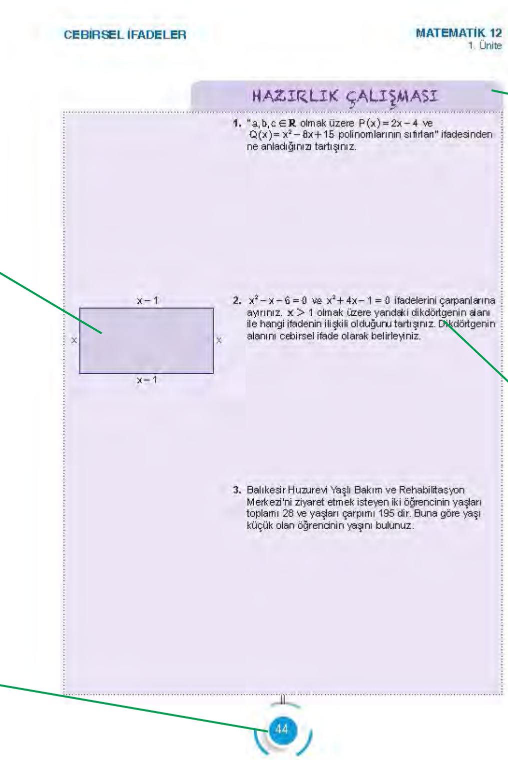
SEMBOLLER VE GÖSTERİMLER

$P(x)$	: Polinom
Δ	: Diskriminant
i	: Sanal (imajiner) sayı birimi
$a+ib$	: Karmaşık sayı
z	: Karmaşık sayı
$\overline{z}$	: Karmaşık sayının eşleniği
$\mathbb{C}$	: Karmaşık sayılar kümesi
$Im(z)$	: Sanal (imajiner) kısım
$Re(z)$	: Reel kısım
r	: Yarıçap
R	: Çap
$\overset{\frown}{AB}$	: AB yayı
$\overset{\frown}{ABC}$	: ABC yayı
$m(\overset{\frown}{AB})$	: AB yayının ölçüsü
r	: Pi sayısı

KİTABIN TANITIMI

Hazırlık çalışmalarının görsellerini gösterir.

Hazırlık çalışması alanını gösterir.

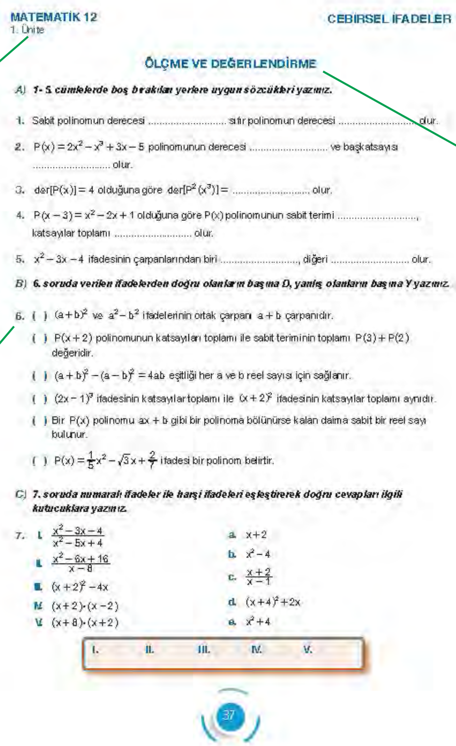


Sayfa numarasını gösterir.

Hazırlık çalışması madde kökünü gösterir.

Ünite düzeyini gösterir.

Ölçme ve değerlendirme bölümünü gösterir.



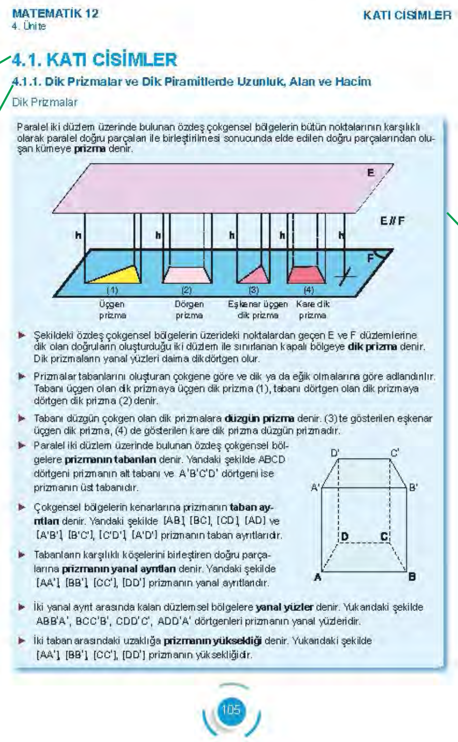
Madde numaralarını gösterir.

Konu başlıklarını gösterir.

Ünite adını gösterir.

Konu alt başlıklarını gösterir.

Konu ile ilgili tanımları gösterir.



MATEMATİK 12
4. Ünite

KATI CİSİMLER

4.1. KATI CİSİMLER

4.1.1. Dik Prizmalar ve Dik Piramitlerde Uzunluk, Alan ve Hacim

Dik Prizmalar

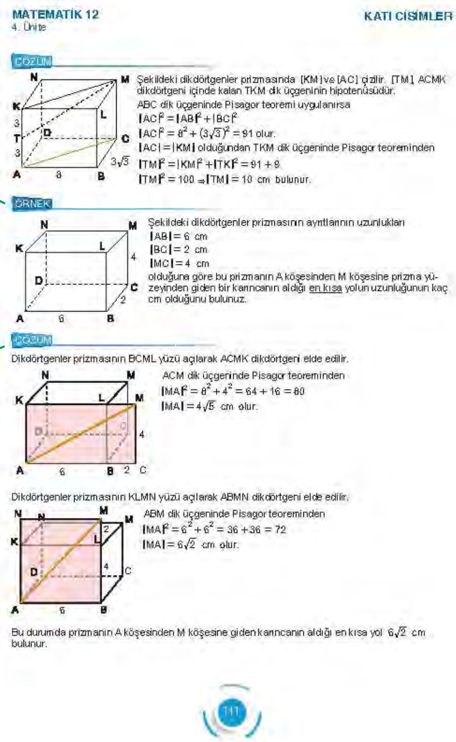
Paralel iki düzlem üzerinde bulunan özdeş çokgensel bölgelerin bütün noktalarının karşılıklı olarak paralel doğru parçaları ile birleştirilmesi sonucunda elde edilen doğru parçalarından oluşan kümeye **prizma** denir.

E, E // F, F, h, (1) Üçgen prizma, (2) Dörgen prizma, (3) Eşkenar üçgen dik prizma, (4) Kare dik prizma

- Şekildeki özdeş çokgensel bölgelerin üzerideki noktalardan geçen E ve F düzlemlerine dik olan doğruların oluşturduğu iki düzlem ile sınırlanan kapalı bölgeye **dik prizma** denir. Dik prizmaların yanal yüzleri daima dikdörtgen olur.
- Prizmalar tabanlarını oluşturan çokgene göre ve dik ya da eğik olmalarına göre adlandırılır. Tabanı üçgen olan dik prizmaya üçgen dik prizma (1), tabanı dörtgen olan dik prizmaya dörtgen dik prizma (2) denir.
- Tabanı düzgün çokgen olan dik prizmalara **düzgün prizma** denir. (3) te gösterilen eşkenar üçgen dik prizma, (4) de gösterilen kare dik prizma düzgün prizmadır.
- Paralel iki düzlem üzerinde bulunan özdeş çokgensel bölgelere **prizmanın tabanları** denir. Yandaki şekilde ABCD dörtgeni prizmanın alt tabanı ve A'B'C'D' dörtgeni ise prizmanın üst tabanıdır.
- Çokgensel bölgelerin kenarlarına prizmanın **taban ayrıtları** denir. Yandaki şekilde [AB], [BC], [CD], [AD] ve [A'B'], [B'C'], [C'D'], [A'D'] prizmanın taban ayrıtlarıdır.
- Tabanların karşılıklı köşelerini birleştiren doğru parçalarına **prizmanın yanal ayrıtları** denir. Yandaki şekilde [AA'], [BB'], [CC'], [DD'] prizmanın yanal ayrıtlarıdır.
- İki yanal ayrıt arasında kalan düzlemsel bölgelere **yanal yüzler** denir. Yukarıdaki şekilde ABB'A', BCC'B', CDD'C', ADD'A' dörtgenleri prizmanın yanal yüzleridir.
- İki taban arasındaki uzaklığa **prizmanın yüksekliği** denir. Yukarıdaki şekilde [AA'], [BB'], [CC'], [DD'] prizmanın yüksekliğidir.

105

Örnek soru alanlarını gösterir.



MATEMATİK 12
4. Ünite

KATI CİSİMLER

ÇÖZÜM

Şekildeki dikdörtgenler prizmasında [KM] ve [AC] çizilir. [TM], ACMK dikdörtgeni içinde kalan TKM dik üçgeninin hipotenüsüdür.
ABC dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa
$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$
$|AC|^2 = 8^2 + (3\sqrt{3})^2 = 91$ olur.
$|AC| = |KM|$ olduğundan TKM dik üçgeninde Pisagor teoreminden
$|TM|^2 = |KM|^2 + |TK|^2 = 91 + 9$
$|TM|^2 = 100 \Rightarrow |TM| = 10$ cm bulunur.

ÖRNEK

Şekildeki dikdörtgenler prizmasının ayrıtlarının uzunlukları
$|AB| = 6$ cm
$|BC| = 2$ cm
$|MC| = 4$ cm
olduğuna göre bu prizmanın A köşesinden M köşesine prizma yüzeyinden giden bir karıncanın aldığı en kısa yolun uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Dikdörtgenler prizmasının BCML yüzü açılarak ACMK dikdörtgeni elde edilir.

ACM dik üçgeninde Pisagor teoreminden
$|MA|^2 = 8^2 + 4^2 = 64 + 16 = 80$
$|MA| = 4\sqrt{5}$ cm olur.

Dikdörtgenler prizmasının KLMN yüzü açılarak ABMN dikdörtgeni elde edilir.

ABM dik üçgeninde Pisagor teoreminden
$|MA|^2 = 6^2 + 6^2 = 36 + 36 = 72$
$|MA| = 6\sqrt{2}$ cm olur.

Bu durumda prizmanın A köşesinden M köşesine giden karıncanın aldığı en kısa yol $6\sqrt{2}$ cm bulunur.

111

Örnek soru çözüm alanlarını gösterir.

12.1. CEBİRSEL İFADELER

KAZANIMLAR

12.1.1. **Polinom Kavramı ve Polinomlarla İşlemler**

12.1.2. **Cebirsel İfadelerin Çarpanlarına Ayrılması**

Bu ünitede polinom, polinomun derecesi, polinomun katsayısı, polinomun başkatsayısı, polinomun sabit terimi, sabit polinom, sıfır polinomu, çarpan, özdeşlik, rasyonel ifade kavramlarını öğreneceksiniz.

HAZIRLIK ÇALIŞMASI

1. Bir f fonksiyonu, “Tanım kümesinden aldığı elemanı; değer kümesinde bu elemanın küpü, karesinin iki katı ve kendisinin üç katının toplamıyla eşleştirir.” şeklinde tanımlanmış ise bu fonksiyona ait $f(x)$ ifadesini bulunuz.

2. $g(x) = 3x + 4$ ve $(fog)(x) = 2x - 4$ olduğuna göre $f(-5)$ değerini bulunuz.

3. $\begin{array}{r|l} A & x-4 \\ \cline{2-2} \underline{-\quad} & x+7 \\ 16 & \end{array}$ işleminde A nın x e bağlı değerini bulunuz.

12.1.1. POLİNOM KAVRAMI VE POLİNOMLARLA İŞLEMLER

12.1.1.1. Bir Değişkenli Polinom Kavramı

$a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N}$ ayrıca x bir değişken olmak üzere
$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ biçimindeki ifadelere; x in azalan kuvvetlerine göre düzenlenmiş, bir değişkenli, gerçek katsayılı **polinom** denir. Polinomlar P, Q, R gibi alfabenin büyük harfleriyle gösterilir.

Bir fonksiyonun polinom olabilmesi için değişkenin tüm kuvvetlerinin doğal sayı olması gerekir.

ÖRNEK

Aşağıda verilen ifadelerin polinom olup olmadığını bulunuz.

a) $P(x) = \frac{1}{5}x^3 + \sqrt{3}x^2 - 2x + 1$

b) $Q(x) = x^3 + \frac{1}{x} - 5x + 7$

c) $R(x) = 5x^2 + \sqrt{x} - 4$

ç) $T(x) = \frac{3}{7}$

d) $x > 0$ olmak üzere $S(y) = 4y^3 + \sqrt{x}y^2 - \frac{1}{x}y + 3$

ÇÖZÜM

a) $P(x)$ ifadesinde x değişkenlerinin katsayıları gerçek sayı ve üssü doğal sayı olduğundan $P(x)$ bir polinomdur.

b) $Q(x)$ ifadesinde $\frac{1}{x} = x^{-1}$ ve $-1 \notin \mathbb{N}$ olduğundan Q(x) bir polinom değildir.

c) $R(x)$ ifadesinde $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ ve $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$ olduğundan R(x) bir polinom değildir.

ç) $T(x) = \frac{3}{7} = \frac{3}{7}x^0$ yazılabileceğinden T(x) bir polinomdur.

d) $S(y)$ ifadesi değişkeni y olan bir polinomdur.

ÖRNEK

$$P(x) = x^4 + x^{\frac{12}{n}} + x^{5-n} + 3$$

ifadesi bir polinom olduğuna göre n sayısının hangi değerleri alabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\frac{12}{n}$ ve $5-n$ ifadeleri birer doğal sayı olmalıdır.

$5 - n \geq 0 \Rightarrow n \leq 5$ olur.

$\frac{12}{n}$ ifadesinin bir doğal sayıya eşit olması için n sayısı, $n \leq 5$ koşulunu da sağlayan 12 nin tam bölenlerinden 1, 2, 3 ve 4 değerlerini alır.

- $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ polinomunda $a_nx^n,\ a_{n-1}x^{n-1},\ \cdots,\ a_1x,\ a_0$ ifadelerine **polinomun terimleri** denir.
- $a_n,\ a_{n-1},\ \cdots,\ a_1,\ a_0$ gerçek sayılarına **polinomun katsayıları** denir.
- Değişkenin en büyük doğal sayı kuvvetine **polinomun derecesi** denir. $P(x)$ polinomunun derecesi, **der[P(x)]** şeklinde gösterilir.
- En büyük dereceli terimin katsayısına **polinomun başkatsayısı** denir.
- Değişkenin bulunmadığı (değişkenin kuvvetinin 0 olduğu) terime **polinomun sabit terimi** denir. Polinomun sabit terimi a_0 olur.

ÖRNEK

$P(x)=5x^3-7x^2+4x-3$ polinomunun

a) Terim sayısını bulunuz.

b) Katsayılarını bulunuz.

c) Derecesini bulunuz.

ç) Başkatsayısını bulunuz.

d) Sabit terimini bulunuz.

ÇÖZÜM

a) $5x^3,\ -7x^2,\ 4x,\ -3$ polinomun terimleridir. Dolayısı ile P(x) polinomunun 4 terimi vardır.

b) Polinomun katsayıları $5,-7,4$ ve -3'tür.

c) Polinomun derecesi 3'tür.

ç) Polinomun başkatsayısı 5'tir.

d) Polinomun sabit terimi -3'tür.

ÖRNEK

$$P(x)=3x^2-8x^3-7x+\frac{2}{5}$$

polinomunun derecesi a, başkatsayısı b ve terim sayısı c ise $a+b+c$ toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

Polinomun derecesi 3, başkatsayısı -8, terim sayısı 4 olduğundan $a+b+c=3+(-8)+4=-1$ bulunur.

Sabit Polinom ve Sıfır Polinomu

$c \in \mathbb{R}-\{0\}$ olmak üzere $P(x)=c$ biçiminde tanımlanan polinoma **sabit polinom** denir. Sabit polinomun derecesi 0 dır.

$P(x)=0$ biçimindeki polinoma **sıfır polinomu** denir. Sıfır polinomunun derecesi belirsizdir.

ÖRNEK

$$P(x)=(a-2)x^3+(b+1)x^2+(c-4)x+a\cdot b-c$$

polinomu, bir sabit polinom olduğuna göre P(x) polinomunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$P(x)$ polinomunun sabit polinom olması için $P(x)=0\cdot x^n+\cdots+0\cdot x^2+0\cdot x+a_0$ şeklinde x li terimlerin katsayılarının 0 olması gerekir.

$$\left.\begin{aligned} a-2=0 &\Rightarrow a=2 \\ b+1=0 &\Rightarrow b=-1 \\ c-4=0 &\Rightarrow c=4 \end{aligned}\right\} \text{ olduğuna göre}$$

$P(x)=(2-2)x^3+(-1+1)x^2+(4-4)x+2\cdot(-1)-4$

$P(x)=-6$ bulunur.

ÖRNEK

$$P(x)=\frac{ax+5}{4x-10}$$

ifadesi, sabit polinom olduğuna göre a değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\frac{ax+5}{4x-10}$ ifadesinin sabit bir sayı olması için $\frac{a}{4}=\frac{5}{-10}$ olmalıdır.

$a\cdot(-10)=4\cdot5 \Rightarrow a=-2$ bulunur.

ÖRNEK

$$P(x)=\frac{3x+12}{x+a}+(b+1)x+b+c$$

ifadesi, sıfır polinomu olduğuna göre c değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$P(x)=0$ olmalıdır. $\frac{3x+12}{x+a}$ ifadesinin sabit bir sayıya eşit olabilmesi için $\frac{3}{1}=\frac{12}{a}\Rightarrow a=4$ olmalıdır. Bu durumda $\frac{3x+12}{x+4}=3$ bulunur.

$b+1=0$ olmalıdır. $b+1=0\Rightarrow b=-1$ olur.

$P(x)=3+(-1)+c=0$ olmalıdır. Bu durumda $2+c=0\Rightarrow c=-2$ bulunur.

Polinomların Eşitliği

Dereceleri aynı olan iki polinomun aynı dereceye sahip terimlerinin katsayıları karşılıklı olarak eşit ise bu polinomlara **eşit polinomlar** denir.

» $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

» $Q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$

polinomları için $P(x) = Q(x) \Leftrightarrow a_n = b_n \wedge a_{n-1} = b_{n-1} \wedge \cdots \wedge a_1 = b_1 \wedge a_0 = b_0$ olmalıdır.

ÖRNEK

$$P(x) = (a-2)x^3 - bx - 3x - 1$$
$$Q(x) = 4x^3 + (c+2)x^2 + x - d - 5$$

polinomları veriliyor. $P(x) = Q(x)$ ise $a+b+c+d$ toplamının değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$P(x)$ ve $Q(x)$ polinomları eşit polinomlar olduğundan aynı dereceli terimlerinin katsayıları birbirine eşit olmalıdır.

$$\left.\begin{array}{l} P(x) = (a-2)x^3 + 0 \cdot x^2 + (-b-3)x + (-1) \\ Q(x) = 4x^3 + (c+2)x^2 + x + (-d-5) \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} a-2=4 \Rightarrow a=6 \\ c+2=0 \Rightarrow c=-2 \\ -b-3=1 \Rightarrow b=-4 \\ -d-5=-1 \Rightarrow d=-4 \end{array}\right\} \text{olduğundan } a+b+c+d = 6+(-2)+(-4)+(-4) = -4 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$$\frac{5x+11}{x^2+3x-10} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+5}$$

eşitliğini sağlayan A ve B gerçek sayılarını bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\frac{5x+11}{x^2+3x-10} = \frac{A}{\underset{(x+5)}{x-2}} + \frac{B}{\underset{(x-2)}{x+5}} \Rightarrow \frac{5x+11}{x^2+3x-10} = \frac{Ax+5A+Bx-2B}{x^2+3x-10}$$

$$\Rightarrow Ax + 5A + Bx - 2B = 5x + 11$$

$$\Rightarrow (A+B)x + 5A - 2B = 5x + 11$$

$$\Rightarrow A + B = 5 \text{ ve } 5A - 2B = 11 \text{ olur.}$$

$$\left.\begin{array}{r} A+B=5 \\ 5A-2B=11 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} 2A+2B=10 \\ +\ \underline{5A-2B=11} \\ 7A=21 \end{array} \Rightarrow A = 3 \text{ ve } B = 2 \text{ bulunur.}$$

12.1.1.2. Polinomlarda Toplama, Çıkarma, Çarpma ve Bölme İşlemleri

Polinomlarda Toplama ve Çıkarma İşlemleri

Polinomlar arasında toplama ya da çıkarma yapılırken aynı dereceye sahip terimlerin katsayıları toplanır ya da çıkarılır.

» $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

» $Q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$

polinomları için

» $P(x) + Q(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$

» $P(x) - Q(x) = (a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0)$

olur.

ÖRNEK

$P(x) = 4x^3 - 5x^2 + 3x + 7$ ve $Q(x) = 2x^2 - 4x - 6$ olduğuna göre aşağıdaki işlemlerin sonucunu bulunuz.

a) $P(x) + Q(x)$

b) $3P(x) - 2Q(x)$

c) $P(x) - Q(x)$

ç) $P(x) + \frac{1}{2}Q(x)$

ÇÖZÜM

a) $P(x) + Q(x) = 4x^3 - 5x^2 + 3x + 7 + 2x^2 - 4x - 6$
$= 4x^3 - 3x^2 - x + 1$

b) $P(x) - Q(x) = 4x^3 - 5x^2 + 3x + 7 - (2x^2 - 4x - 6)$
$= 4x^3 - 5x^2 + 3x + 7 - 2x^2 + 4x + 6$
$= 4x^3 - 7x^2 + 7x + 13$

c) $3P(x) - 2Q(x) = 3 \cdot (4x^3 - 5x^2 + 3x + 7) - 2 \cdot (2x^2 - 4x - 6)$
$= 12x^3 - 15x^2 + 9x + 21 - 4x^2 + 8x + 12$
$= 12x^3 - 19x^2 + 17x + 33$

ç) $P(x) + \frac{1}{2}Q(x) = 4x^3 - 5x^2 + 3x + 7 + \frac{1}{2} \cdot (2x^2 - 4x - 6)$
$= 4x^3 - 5x^2 + 3x + 7 + x^2 - 2x - 3$
$= 4x^3 - 4x^2 + x + 4$ bulunur.

Polinomlarla Çarpma İşlemi

İki polinom arasında çarpma işlemi yapılırken birinci polinomun her terimi ile ikinci polinomun her terimi çarpılır ve sonra aynı dereceli terimler toplanır. İşlem yapılırken çarpma işleminin toplama ve çıkarma işlemleri üzerine dağılma özelliği kullanılır.

ÖRNEK

$P(x) = x^2 - 2x$ ve $Q(x) = x - 3$ olduğuna göre $P(x) \cdot Q(x)$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} P(x) \cdot Q(x) &= (x^2 - 2x) \cdot (x - 3) \\ &= x^3 - 3x^2 - 2x^2 + 6x \\ &= x^3 - 5x^2 + 6x \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Polinomlarla Bölme İşlemi

$der[P(x)] \geq der[Q(x)]$ ve $Q(x) \neq 0$ olmak üzere P(x) polinomunun Q(x) polinomuna bölümü,

» $\begin{array}{r|l} P(x) & Q(x) \\ \cline{2-2} - & B(x) \\ \hline K(x) & \end{array}$ ve $\mathbf{P(x) = B(x) \cdot Q(x) + K(x)}$ şeklinde ifade edilebilir.

Bu bölme işleminde

$P(x)$ polinomuna bölünen polinomu,

$Q(x)$ polinomuna bölen polinomu,

$B(x)$ polinomuna bölüm polinomu ve

$K(x)$ polinomuna kalan polinomu denir.

» $der[K(x)] < der[Q(x)]$ olmalıdır.

» $K(x) = 0$ ise $P(x)$ polinomu $Q(x)$ ve $B(x)$ polinomlarına tam bölünür.

» $der[K(x)] < der[B(x)]$ ise $Q(x)$ ile $B(x)$ polinomları yer değiştirebilir. Bu durumda kalan değişmez.

ÖRNEK

$P(x) = x^3 + 2x - 3$ ve $Q(x) = x + 2$ polinomları veriliyor. Buna göre $P(x)$ polinomunun $Q(x)$ polinomu ile bölümünden elde edilen bölüm ve kalan polinomlarını bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 2x - 3 & x + 2 \\ \cline{2-2} - \quad x^3 + 2x^2 & x^2 - 2x + 6 \\ \cline{1-1} -2x^2 + 2x - 3 & \\ - \quad -2x^2 - 4x & \\ \cline{1-1} 6x - 3 & \\ - \quad 6x + 12 & \\ \cline{1-1} -15 & \end{array}$$

bulunur.

- $x^3 + 2x - 3$ polinomunun en büyük dereceli terimini elde etmek için $x + 2$ bölen polinomu x^2 terimi ile çarpılarak $x^3 + 2x - 3$ polinomundan çıkarılır.
- Bulunan $-2x^2 + 2x - 3$ polinomunun en büyük dereceli terimini elde etmek için $x + 2$ bölen polinomu $-2x$ terimi ile çarpılarak $-2x^2 + 2x - 3$ polinomundan çıkarılır.
- Bulunan $6x - 3$ polinomunun en büyük dereceli terimini elde etmek için $x + 2$ bölen polinomu 6 terimi ile çarpılarak $6x - 3$ polinomundan çıkarılır.
- Böylece $P(x)$ polinomunun $Q(x)$ polinomuna bölümünden elde edilen bölüm $x^2 - 2x + 6$ ve kalan -15 olarak bulunur.
- Polinomlarda bölme işlemine, kalan polinomun derecesi bölen polinomun derecesinden küçük olana kadar devam edilir.

ÖRNEK

$P(x) = 3x^2 + 4x - 5$ olduğuna göre $P(2)$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$P(x)$ polinomunda x yerine 2 yazılarak $P(2)$ hesaplanır.

$$P(x) = 3x^2 + 4x - 5 \Rightarrow P(2) = 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - 5$$
$$= 15 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$P(2x - 1) = 2x^2 + 5x - 7$ olduğuna göre $P(5)$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$P(5)$ değerini bulmak için $2x - 1$ ifadesi 5'e eşitlenir. $2x - 1 = 5 \Rightarrow x = 3$ olur. Bu değer verilen polinomda x yerine yazılırsa $P(2x - 1) = 2x^2 + 5x - 7 \Rightarrow P(2 \cdot 3 - 1) = 2 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 - 7$

$$P(5) = 2 \cdot 9 + 5 \cdot 3 - 7$$
$$= 26 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$P(x) = -5x + 4$ olduğuna göre $P(2x - 3)$ polinomunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$P(x) = -5x + 4$ polinomunda x yerine $2x - 3$ yazılırsa $P(2x - 3) = -5 \cdot (2x - 3) + 4$

$$= -10x + 15 + 4$$
$$= -10x + 19 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$P(x + 2) = 4x + 11$ olduğuna göre $P(x)$ polinomunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$P(x)$ polinomunu bulmak için x yerine $x - 2$ yazılırsa

$$P(x + 2) = 4x + 11 \Rightarrow P(x - 2 + 2) = 4 \cdot (x - 2) + 11$$
$$P(x) = 4x - 8 + 11$$
$$P(x) = 4x + 3 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$P(x-1)=3x-7$ olduğuna göre $P(2x+2)$ polinomunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$P(x-1)=3x-7$ polinomunda x yerine $2x+3$ yazılırsa

$$P(x-1)=3x-7 \Rightarrow P(2x+3-1)=3\cdot(2x+3)-7$$
$$P(2x+2)=6x+9-7$$
$$=6x+2 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$P(x-1)+P(x+3)=4x+2$ eşitliği veriliyor. Buna göre $P(7)$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$P(x-1)$ ve $P(x+3)$ polinomlarının toplamı, 1. dereceden $4x+2$ polinomuna eşit olduğu için $P(x)=ax+b$ biçiminde bir polinom olmalıdır.

$$P(x-1)+P(x+3)=a\cdot(x-1)+b+a\cdot(x+3)+b$$
$$4x+2=ax-a+b+ax+3a+b$$
$$4x+2=2ax+2a+2b \text{ olur.}$$

Polinomların eşitliğinden

$2a=4 \Rightarrow a=2$ ve $2a+2b=2 \Rightarrow 4+2b=2 \Rightarrow b=-1$ bulunur.

Bu durumda $P(x)=2x-1$ olduğuna göre $P(7)=2\cdot7-1=13$ bulunur.

ÖRNEK

$(x-2)\cdot P(x+4)=x\cdot P(x-1)+4x-6$ olduğuna göre $P(4)-P(1)$ toplamının değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Eşitlikte x yerine 2 yazılırsa

$$(2-2)\cdot P(2+4)=2\cdot P(2-1)+4\cdot2-6$$
$$0=2\cdot P(1)+2$$
$$P(1)=-1 \text{ olur.}$$

Eşitlikte x yerine 0 yazılırsa

$$(0-2)\cdot P(0+4)=0\cdot P(0-1)+4\cdot0-6$$
$$(-2)\cdot P(4)=-6$$
$$P(4)=3 \text{ olur.}$$

Bu durumda $P(4)-P(1)=3-(-1)$
$$=4 \text{ bulunur.}$$

Polinomun Derecesi

$der[P(x)] = m$, $der[Q(x)] = n$ olmak üzere polinomun derecesi ile ilgili aşağıdaki çıkarımlarda bulunulabilir.

» $der[P(x) \cdot Q(x)] = m + n$

» $m \geq n$ olmak üzere $der\left[\frac{P(x)}{Q(x)}\right] = m - n$ ($\frac{P(x)}{Q(x)}$ ifadesinin polinom olması için P(x) polinomu Q(x) polinomuna kalansız bölünmelidir.)

» $der[P(x) \pm Q(x)] = max[m, n]$ (m ve n arasından büyük olanı alınır.)

» $r \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $der[P^r(x)] = r \cdot m$

» $r \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $der[P(x^r)] = r \cdot m$

ÖRNEK

$der[P(x) \cdot Q(x)] = 8$ ve $der\left[\frac{P(x)}{Q(x)}\right] = 2$ olduğuna göre $der[P(x) - Q(x)]$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$der[P(x)] = m$ ve $der[Q(x)] = n$ olsun.

$der[P(x) \cdot Q(x)] = 8 \Rightarrow m + n = 8$

$der\left[\frac{P(x)}{Q(x)}\right] = 2 \Rightarrow m - n = 2$ olur.

$$\begin{array}{rl} & m + n = 8 \\ + & m - n = 2 \\ \hline & 2m = 10 \Rightarrow m = 5 \text{ ve } n = 3 \text{ olur.} \end{array}$$

Buradan $der[P(x) - Q(x)] = max[m, n]$ olduğundan $der[P(x) - Q(x)] = 5$ bulunur.

ÖRNEK

$P(x) = x^3 - 2x + 1$ ve $Q(x) = x - 5x^4$ polinomları veriliyor. Buna göre aşağıdaki ifadelerin değerlerini bulunuz.

a) $der[P(x^2)]$

b) $der[Q^5(x)]$

c) $der[x^3 \cdot P(x) + 6 \cdot Q(x+3)]$

ÇÖZÜM

$der[P(x)] = 3$ ve $der[Q(x)] = 4$ olduğundan $P(x)$ ve $Q(x)$ polinomlarının en büyük dereceli terimleri haricindeki terimlerini dikkate almaya gerek yoktur. Bu durumda $P(x) = x^3$ ve $Q(x) = x^4$ alınabilir.

a) $P(x) = x^3$, $P(x^2) = (x^3)^2 = x^6$, $der[P(x^2)] = 6$ bulunur.

b) $Q(x) = x^4$, $Q^5(x) = (x^4)^5 = x^{20}$, $der[Q^5(x)] = 20$ bulunur.

c) $x^3 \cdot P(x) + 6 \cdot Q(x+3) = x^3 \cdot x^3 + 6 \cdot (x+3)^4 = x^6 + 6 \cdot (x+3)^4$ olur.

$(x+3)^4$ açılımından gelen en büyük dereceli terim x^4 olduğundan polinomun derecesi 6 olur.

$der[x^3 \cdot P(x) + 6 \cdot Q(x+3)] = 6$ bulunur.

ÖRNEK

$P(x)$ polinom olmak üzere $der[P(x)] = 7$ ise $der[x^3 \cdot P(x^2)]$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$P(x) = x^7$ olarak alınabilir. $P(x^2) = (x^2)^7 = x^{14}$ olur.

$P(x^2) = x^{14} \Rightarrow x^3 \cdot P(x^2) = x^3 \cdot x^{14} = x^{17}$ olduğundan

$der[x^3 \cdot P(x^2)] = 17$ bulunur.

Polinomun Sabit Terimi ve Katsayıları Toplamı

Bir $P(x)$ polinomunun

- Sabit terimi $P(0)$
- Katsayıları toplamı $P(1)$
- Çift dereceli terimlerinin katsayıları toplamı $\dfrac{P(1)+P(-1)}{2}$
- Tek dereceli terimlerinin katsayıları toplamı $\dfrac{P(1)-P(-1)}{2}$

değerleridir.

$a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $P(ax + b)$ polinomunun sabit terimini bulmak için x yerine 0 yazılır, katsayıları toplamını bulmak için x yerine 1 yazılır. Örneğin $P(x + 4)$ polinomunun sabit terimi $P(4)$, katsayıları toplamı $P(5)$ değeridir.

ÖRNEK

$P(x) = (3x^{2022} - x^{83})^5$ polinomunun katsayıları toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

$P(x)$ polinomunun katsayıları toplamı $P(1)$ değeridir.

$$\begin{aligned} P(1) &= (3 \cdot 1^{2022} - 1^{83})^5 \\ &= (3 \cdot 1 - 1)^5 \\ &= 2^5 \\ &= 32 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK

$P(x) = x^2 + 2x - 1$ olduğuna göre $P(x+3)$ polinomunun katsayıları toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

$P(x + 3)$ polinomunun katsayıları toplamı, $P(1 + 3) = P(4)$ değeridir.
$P(x) = x^2 + 2x - 1$ eşitliğinde x yerine 4 yazılırsa

$$\begin{aligned} P(4) &= 4^2 + 2 \cdot 4 - 1 \\ &= 23 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK

$P(x+4)=x^2+2x-1$ olduğuna göre $P(x+5)$ polinomunun katsayıları toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

$P(x+5)$ polinomunun katsayıları toplamı, $P(1+5)=P(6)$ değeridir.
$P(x+4)=x^2+2x-1$ eşitliğinde x yerine 2 yazılırsa
$P(2+4)=2^2+2\cdot2-1 \Rightarrow P(6)=7$ bulunur.

ÖRNEK

$P(x)=x^2+2x+m$ ve $P(x-2)$ polinomunun katsayıları toplamı 4 olduğuna göre m değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$P(x-2)$ polinomunun katsayıları toplamı, $P(1-2)=P(-1)$ değeridir.
$P(-1)=4$ olduğundan $P(x)=x^2+2x+m$ eşitliğinde x yerine -1 yazılırsa

$P(-1)=(-1)^2+2\cdot(-1)+m$
$4=-1+m$
$m=5$ bulunur.

ÖRNEK

$P(x)=x^2-x+3$ olduğuna göre $P(x)$ polinomunun sabit terimini bulunuz.

ÇÖZÜM

$P(x)$ polinomunun sabit terimi, $P(0)$ değeridir.
$P(x)=x^2-x+3$ eşitliğinde x yerine 0 yazılırsa
$P(0)=0^2-0+3=3$ bulunur.

ÖRNEK

$P(x-1)=x^3+4x+1$ olduğuna göre $P(x)$ polinomunun sabit terimini bulunuz.

ÇÖZÜM

$P(x)$ polinomunun sabit terimi, $P(0)$ değeridir.
$P(x-1)=x^3+4x+1$ eşitliğinde x yerine 1 yazılırsa

$P(1-1)=1^3+4\cdot1-1$
$P(0)=4$ bulunur.

ÖRNEK

$P(x+1)=x^2+3x-4$ olduğuna göre $P(x+4)$ polinomunun sabit terimini bulunuz.

ÇÖZÜM

$P(x+4)$ polinomunun sabit terimi, $P(0+4)=P(4)$ değeridir.
$P(x+1)=x^2+3x-4$ eşitliğinde x yerine 3 yazılırsa $P(3+1)=3^2+3\cdot3-4$
$P(4)=14$ bulunur.

ÖRNEK

$P(x) = (5x^2 + 2x - 1)^2$ polinomunun tek dereceli terimlerinin katsayıları toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

$P(x)$ polinomunun tek dereceli terimlerinin katsayıları toplamı $\dfrac{P(1) - P(-1)}{2}$ ile bulunur.

$P(1) = (5 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 1)^2 = 36$

$P(-1) = (5 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 1)^2 = 4$ olur.

$\dfrac{P(1) - P(-1)}{2} = \dfrac{36 - 4}{2} = 16$ bulunur.

ÖRNEK

$P(x) = (x^2 + 3x - 2)^3$ polinomunun çift dereceli terimlerinin katsayıları toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

P(x) polinomunun çift dereceli terimlerinin katsayıları toplamı $\dfrac{P(1) + P(-1)}{2}$ ile bulunur.

$P(1) = (1^2 + 3 \cdot 1 - 2)^3 = 8$

$P(-1) = ((-1)^2 + 3 \cdot (-1) - 2)^3 = -64$ olur.

$\dfrac{P(1) + P(-1)}{2} = \dfrac{8 + (-64)}{2} = \dfrac{-56}{2} = -28$ bulunur.

ÖRNEK

$P(2x + 1) = x \cdot Q(3x - 1) + x^2 - 5$ eşitliği veriliyor. $P(4x + 3)$ polinomunun katsayıları toplamı 8 olduğuna göre $Q(x + 8)$ polinomunun sabit terimini bulunuz.

ÇÖZÜM

$P(4x + 3)$ polinomunun katsayıları toplamı, $P(4 \cdot 1 + 3) = P(7)$ değeridir. $P(7) = 8$ olur.

$Q(x + 8)$ polinomunun sabit terimi $Q(0 + 8) = Q(8)$ değeridir.

$3x - 1 = 8 \Rightarrow 3x = 9 \Rightarrow x = 3$ olur.

$P(2x + 1) = x \cdot Q(3x - 1) + x^2 - 5$ eşitliğinde x yerine 3 yazılırsa

$$P(2 \cdot 3 + 1) = 3 \cdot Q(3 \cdot 3 - 1) + 3^2 - 5$$
$$P(7) = 3 \cdot Q(8) + 4$$
$$8 = 3 \cdot Q(8) + 4$$
$$Q(8) = \frac{4}{3} \text{ bulunur.}$$

Polinomun Bölme İşlemi Yapmadan Kalanını Bulma

$P(x)$ polinomunun $x-a$ ile bölümünden kalan, $K=P(a)$ olur.

» $$\begin{array}{r|l} P(x) & x-a \\ \cline{2-2} - \quad & B(x) \\ \hline K(x) & \end{array} \qquad \begin{array}{l} P(x)=(x-a)\cdot B(x)+K(x) \\ x-a=0 \text{ için } x=a \text{ olur.} \end{array}$$

» Denklemde x yerine a yazılırsa $P(a)=K(a)$ bulunur ve $P(x)$ polinomunun x – a polinomuna bölümünden kalanın $P(a)$ değerine eşit olduğu görülür.

» $a,b,c\in\mathbb{R}$ olmak üzere bir polinomun birinci dereceden bir polinoma bölümünden kalan, bir gerçek sayıdır.

P(x) polinomunun birinci dereceden bir polinoma bölümünden kalanı bulmak için bölen polinomu 0 yapan değer, P(x) polinomunda yerine yazılır. Örneğin

» $P(x)$ polinomunun $x-2$ ile bölümünden kalan $P(2)$,

» $P(x)$ polinomunun $x+5$ ile bölümünden kalan $P(-5)$,

» $P(x+3)$ polinomunun $x-5$ ile bölümünden kalan $P(8)$ ve

» $P(3x-2)$ polinomunun $x-4$ ile bölümünden kalan $P(10)$ değerleridir.

ÖRNEK

$P(x)=x^4-4x^3+x+1$ polinomunun $x+2$ ile bölümünden kalanı bulunuz.

ÇÖZÜM

$x+2=0\Rightarrow x=-2$ olduğundan $P(x)$ polinomunun $x+2$ ile bölümünden kalan $P(-2)$ değeridir.
$P(x)=x^4-4x^3+x+1$ eşitliğinde x yerine -2 yazılırsa

$$\begin{aligned} P(-2)&=(-2)^4-4\cdot(-2)^3+(-2)+1 \\ &=16+32-2+1 \\ &=47 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK

$P(x+2)=x^2+2x-7$ olduğuna göre $P(x)$ polinomunun $x-5$ ile bölümünden kalanı bulunuz.

ÇÖZÜM

$x-5=0\Rightarrow x=5$ olduğundan $P(x)$ polinomunun $x-5$ ile bölümünden kalan $P(5)$ değeridir.
$P(x+2)=x^2+2x-7$ eşitliğinde x yerine 3 yazılırsa

$$\begin{aligned} P(3+2)&=3^2+2\cdot3-7 \\ P(5)&=8 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK

$P(2x+4) = x^2 - 2x - 5$ olduğuna göre $P(4x+2)$ polinomunun $x+1$ ile bölümünden kalanı bulunuz.

ÇÖZÜM

$x+1=0 \Rightarrow x=-1$ olduğundan $P(4x+2)$ polinomunun $x+1$ ile bölümünden kalan
$P(4\cdot(-1)+2) = P(-2)$ değeridir.
$P(2x+4) = x^2 - 2x - 5$ eşitliğinde x yerine -3 yazılırsa

$$P(2\cdot(-3)+4) = (-3)^2 - 2\cdot(-3) - 5$$
$$P(-2) = 9+6-5$$
$$= 10 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$k \in \mathbb{R}$ olmak üzere $(x-4)\cdot P(x) = x^2 + 2x + k$ olduğuna göre $P(x-2)$ polinomunun $x-5$ ile bölümünden kalanı bulunuz.

ÇÖZÜM

$(x-4)\cdot P(x) = x^2 + 2x + k$ eşitliğinde x yerine 4 yazılırsa

$$(4-4)\cdot P(4) = 4^2 + 2\cdot 4 + k$$
$$0 = 24 + k \Rightarrow k = -24 \text{ bulunur.}$$

Bu durumda polinom $(x-4)\cdot P(x) = x^2 + 2x - 24$ olur.
$x-5=0 \Rightarrow x=5$ olduğundan $P(x-2)$ polinomunun $x-5$ ile bölümünden kalan
$P(5-2) = P(3)$ değeridir.
$(x-4)\cdot P(x) = x^2 + 2x - 24$ eşitliğinde x yerine 3 yazılırsa

$$(3-4)\cdot P(3) = 3^2 + 2\cdot 3 - 24$$
$$(-1)\cdot P(3) = -9$$
$$P(3) = 9 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$P(x)$ polinomunun $x-2$ ile bölümünde bölüm x^2+2x-1 ve kalan 3 olduğuna göre $P(x)$ polinomunun $x-3$ ile bölümünden kalanı bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{array}{r|l} P(x) & x-2 \\ \hline - & x^2+2x-1 \\ 3 & \end{array}$$

Yandaki bölme işleminden
$P(x) = (x-2)\cdot(x^2+2x-1) + 3$ olur.

$P(x)$ polinomunun $x-3$ ile bölümünden kalan $P(3)$ değeridir.
$P(x) = (x-2)\cdot(x^2+2x-1) + 3$ eşitliğinde x yerine 3 yazılırsa

$$P(3) = (3-2)\cdot(3^2 + 2\cdot 3 - 1) + 3$$
$$= 1\cdot 14 + 3$$
$$= 17 \text{ bulunur.}$$

ALIŞTIRMALAR

1. $P(x) = 2x^{\frac{24}{n}} + 7x^{8-n} + 3x + 2$ ifadesi bir polinom olduğuna göre n sayısının alabileceği değerler toplamını bulunuz.

2. $P(x-3) = 3x^2 - 5x + 7$ olduğuna göre $P(1)$ değerini bulunuz.

3. $P(x) = (m-2)x^2 + (n+3)x + m - n$ ifadesi sabit polinom olduğuna göre $P(-7)$ değerini bulunuz.

4. $der[P(x)] = 4,\ der[Q(x)] = 2$ olduğuna göre $P^2(x) \cdot Q^3(x)$ polinomunun derecesini bulunuz.

5. $P(x) = ax^2 - x^2 - 3x + b$ ile $Q(x) = 2x^2 + cx + x - 1$ eşit polinomlar olduğuna göre $a + b + c$ değerini bulunuz.

6. $P(x) = x^3 - 7$ polinomunun $Q(x) = x^2 - x - 1$ polinomuna bölümünden elde edilen bölüm $B(x)$ ve kalan $K(x)$ polinomu olduğuna göre $B(x) + K(x)$ polinomunu bulunuz.

7. $P(x+4) = x^3 + 2x - 1$ olduğuna göre $P(x+5)$ polinomunun katsayıları toplamını bulunuz.

8. $P(x+1) = x^3 + 2x - 1$ olduğuna göre $P(x+2)$ polinomunun sabit terimini bulunuz.

9. $P(x) = x^3 - 2x^2 + 5$ polinomunun $x - 2$ ile bölümünden kalanı bulunuz.

10. $P(x+5) = x^2 + 3x - 1$ olduğuna göre $P(x-1)$ polinomunun $x - 6$ ile bölümünden kalanı bulunuz.

11. $P(x) = (2x^2 + x - 1)^3$ polinomunun tek dereceli terimlerinin katsayıları toplamını bulunuz.

12. $P(x)$ polinomunun $x - 1$ ile bölümünde bölüm $3x + 8$ ve kalan 6 olduğuna göre $P(x)$ polinomunu bulunuz.

12.1.2. CEBİRSEL İFADELERİN ÇARPANLARA AYRILMASI

Cebirsel İfade

İçinde en az bir bilinmeyen bulunan matematiksel ifadelere **cebirsel ifadeler** denir.

» $x+3,\ 2-3x^2,\ a+ab,\ 3x-5y$ ifadeleri birer cebirsel ifadedir.

12.1.2.1. Cebirsel İfadelerin Çarpanlara Ayrılması

Bir cebirsel ifadenin daha düşük dereceli ifadelerin çarpımı şeklinde yazılmasına **çarpanlara ayırma** denir.

Ortak Çarpan Parantezine Alarak Çarpanlara Ayırma

Bir cebirsel ifadenin her terimindeki ortak çarpanın parantez içine alınarak yazılması işlemine **ortak çarpan parantezine alarak çarpanlara ayırma** denir.

Örneğin $y \in \mathbb{R}$ olmak üzere x^2+xy ifadesinde iki terim vardır. Bu iki terimde de x çarpanı ortak olduğundan ifade x çarpanı parantezine alınır ve $x^2+xy = x\cdot(x+y)$ şeklinde çarpanlarına ayrılır.

ÖRNEK

Aşağıdaki ifadeleri ortak çarpan parantezine alarak çarpanlara ayırınız.

a) x^3+5x

b) a^3-a^2-a

c) $6ab^2-12ab$

ç) $3a+6b-9c$

d) $17\cdot37+13\cdot17$

e) $a(x-b)+x-b$

f) $x\cdot(a-1)-a+1$

g) $(m+2n)^2-4(m+2n)$

ÇÖZÜM

a) Tüm terimlerde x ortak çarpan olduğundan $x^3+5x = x\cdot(x^2+5)$ bulunur.

b) Tüm terimlerde a ortak çarpan olduğundan $a^3-a^2-a = a\cdot(a^2-a-1)$ bulunur.

c) Tüm terimlerde $6ab$ ortak çarpan olduğundan $6ab^2-12ab = 6ab\cdot(b-2)$ bulunur.

ç) Tüm terimlerde 3 ortak çarpan olduğundan $3a+6b-9c = 3\cdot(a+2b-3c)$ bulunur.

d) Tüm terimlerde 17 ortak çarpan olduğundan $17\cdot37+13\cdot17 = 17\cdot(37+13) = 17\cdot50 = 850$ bulunur.

e) Tüm terimlerde $x-b$ ortak çarpan olduğundan $a(x-b)+x-b = (x-b)\cdot(a+1)$ bulunur.

f) Tüm terimlerde $a-1$ ortak çarpan olduğundan
$x\cdot(a-1)-a+1 = x\cdot(a-1)-(a-1) = (a-1)\cdot(x-1)$ bulunur.

g) Tüm terimlerde $m+2n$ ortak çarpan olduğundan
$(m+2n)^2-4(m+2n) = (m+2n)\cdot(m+2n-4)$ bulunur.

ÖRNEK

$mx^2 + mx - 2x - 2$ ifadesini çarpanlara ayırınız.

ÇÖZÜM

Tüm terimlerde ortak çarpan olmadığından önce ilk iki terimi mx, son iki terimi -2 ortak çarpan parantezine alalım.

$mx^2 + mx - 2x - 2 = mx \cdot (x + 1) - 2(x + 1)$ olur.

Her iki terimde de $x + 1$ ortak çarpan olduğundan

$= (x + 1) \cdot (mx - 2)$ bulunur.

ÖRNEK

$x^3 + x^2 + x + 1$ ifadesinin çarpanlara ayrılmış şeklini bulunuz.

ÇÖZÜM

Tüm terimlerde ortak çarpan olmadığından önce ilk iki terimi x^2 ortak çarpan parantezine alalım.

$x^3 + x^2 + x + 1 = x^2 \cdot (x + 1) + x + 1$ olur. $x + 1$ ortak çarpan olduğundan

$= (x + 1) \cdot (x^2 + 1)$ bulunur.

ÖRNEK

$a^2x - ax - a^3 + a^2 + abx - bx - a^2b + ab$ ifadesinin çarpanlara ayrılmış şeklini bulunuz.

ÇÖZÜM

Tüm terimlerde ortak çarpan olmadığından önce ilk iki terimi ax, üçüncü ve dördüncü terimleri a^2, beşinci ve altıncı terimleri bx ve son iki terimi ab ortak çarpan parantezine alalım.

$$\begin{aligned} a^2x - ax - a^3 + a^2 + abx - bx - a^2b + ab &= ax(a - 1) - a^2 \cdot (a - 1) + bx \cdot (a - 1) - ab(a - 1) \\ &= (a - 1) \cdot (ax - a^2 + bx - ab) \\ &= (a - 1) \cdot [a(x - a) + b(x - a)] \\ &= (a - 1) \cdot (x - a) \cdot (a + b) \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK

$a + b = 5$ ve $a + c = 6$ olduğuna göre $a^2 + ac + ab + bc$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Tüm terimlerde ortak çarpan olmadığından önce ilk iki terimi a, son iki terimi b ortak çarpan parantezine alalım.

$$\begin{aligned} a^2 + ac + ab + bc = a \cdot (a + c) + b(a + c) &= (a + c) \cdot (a + b) \text{ olur.} \\ &= 6 \cdot 5 \\ &= 30 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK

$37 \cdot 57 + 43 \cdot 72 + 83 \cdot 57 + 77 \cdot 72$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Tüm terimlerde ortak çarpan olmadığından önce birinci ve üçüncü terimi 57, ikinci ve dördüncü terimi 72 ortak çarpan parantezine alalım.

Her iki terimde de 120, ortak çarpan olduğundan

$$\begin{aligned} 57 \cdot (37 + 83) + 72 \cdot (43 + 77) &= 57 \cdot 120 + 72 \cdot 120 \\ &= 120 \cdot (57 + 72) \\ &= 120 \cdot 129 \\ &= 15\,480 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Tam Kare Özdeşliği

Her $x, y \in \mathbb{R}$ için $(x + y)$ ve $(x - y)$ nin karelerini gösteren özdeşliktir. Bu özdeşlikler

» $$\begin{aligned} (x + y)^2 = (x + y) \cdot (x + y) &= x^2 + xy + xy + y^2 \\ &= x^2 + 2xy + y^2 \end{aligned}$$

» $$\begin{aligned} (x - y)^2 = (x - y) \cdot (x - y) &= x^2 - xy - xy + y^2 \\ &= x^2 - 2xy + y^2 \end{aligned}$$

biçimindedir.

ÖRNEK

$(3x + 4)^2$ ifadesinin açılımını tamkare özdeşliğini kullanarak yapınız.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} (3x + 4)^2 &= (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 4 + 4^2 \\ &= 9x^2 + 24x + 16 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK

$(2x - 3)^2$ ifadesinin açılımını tamkare özdeşliğini kullanarak yapınız.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} (2x - 3)^2 &= (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot (-3) + (-3)^2 \\ &= 4x^2 - 12x + 9 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK

$x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x \cdot y = 12$ ve $x + y = 7$ ise $x^2 + y^2$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ özdeşliğinde verilen değerler yazılırsa

$$\begin{aligned} 7^2 &= x^2 + 2 \cdot 12 + y^2 \\ 49 &= x^2 + y^2 + 24 \\ x^2 + y^2 &= 25 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

İki Kare Farkı Özdeşliği

Her $x, y \in \mathbb{R}$

» $(x-y)\cdot(x+y) = x^2 + xy - xy - y^2$
$= x^2 - y^2$ olur.

ÖRNEK

$x^2 - 9$ ifadesini çarpanlara ayırınız.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} x^2 - 9 &= x^2 - 3^2 \\ &= (x-3)(x+3) \end{aligned}$$ bulunur.

ÖRNEK

$16 - 4x^2$ ifadesini çarpanlara ayırınız.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} 16 - 4x^2 &= 4^2 - (2x)^2 \\ &= (4-2x)(4+2x) \end{aligned}$$ bulunur.

$ax^2 + bx + c$ Biçimindeki İfadelerin Çarpanlarına Ayrılması

$ax^2 + bx + c$ ifadesinde c nin iki çarpanı k ve t ile a nın iki çarpanı m ve n arasında $k \cdot n + t \cdot m = b$ şeklinde bir eşitlik sağlanıyorsa $ax^2 + bx + c$ ifadesinin çarpanlara ayrılmış şekli, $ax^2 + bx + c = (mx + k)\cdot(nx + t)$ olur.

» $ax^2 \ + \ bx \ + \ c$

$$\begin{array}{ll} mx & k \\ nx & t \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & k \cdot nx \\ + & t \cdot mx \\ \hline & k \cdot nx + t \cdot mx = bx \end{array}$$

ÖRNEK

$x^2 + 5x + 6$ ifadesinin çarpanlara ayrılmış şeklini bulunuz.

ÇÖZÜM

$x^2 \ + \ 5x \ + \ 6$

$$\begin{array}{ll} x & 2 \\ x & 3 \end{array}$$

$x \cdot 3 + x \cdot 2 = 5x$ olduğundan $x^2 + 5x + 6 = (x+2)\cdot(x+3)$ bulunur.

ÖRNEK

$2x^2-5x-3$ ifadesinin çarpanlara ayrılmış şeklini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{array}{lcl} 2x^2 & -\ 5x\ - & 3 \\ 2x & & 1 \\ x & & -3 \end{array}$$

$2x\cdot(-3)+x\cdot 1=-5x$ olduğundan $2x^2-5x-3=(2x+1)\cdot(x-3)$ bulunur.

ÖRNEK

$4x^2-12x+5$ ifadesinin çarpanlara ayrılmış şeklini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{array}{lcl} 4x^2 & -\ 12x\ + & 5 \\ 2x & & -1 \\ 2x & & -5 \end{array}$$

$2x\cdot(-5)+2x\cdot(-1)=-12x$ olduğundan $4x^2-12x+5=(2x-1)\cdot(2x-5)$ bulunur.

12.1.2.1. Rasyonel İfadelerin Sadeleştirilmesi

B P(x) ve Q(x) birer polinom ve $Q(x)\neq 0$ olmak üzere $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ifadesine **rasyonel ifade** denir.

» $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ rasyonel ifadesinde P(x) ve Q(x) polinomları çarpanlara ayrılır varsa ortak çarpanlar sadeleştirilir.

» Rasyonel ifadelerde sadeleştirme yapılabilmesi için bütün terimlerin çarpım hâlinde bulunması gerekir.

- $\dfrac{ax+by+c}{x}$ ifadesinde x ler sadeleşmez.
- $\dfrac{(2x+1)\cdot(3x^2+4x+1)}{2x+1}$ ifadesinde $2x+1$ ifadeleri sadeleşir.
- $\dfrac{(2x+1)\cdot(3x^2+4x+1)+1}{2x+1}$ ifadesinde $2x+1$ ifadeleri sadeleşmez.

ÖRNEK

$\dfrac{x^2-16}{x+4}$ ifadesinin en sade şeklini bulunuz.

ÇÖZÜM

İfadenin payı iki kare farkı özdeşliği kullanılarak çarpanlarına ayrılır ve daha sonra pay ve paydada bulunan ortak çarpanlar sadeleştirilirse

$$\begin{aligned}\frac{x^2-16}{x+4} &= \frac{x^2-4^2}{x+4} \\ &= \frac{(x-4)\cdot\cancel{(x+4)}}{\cancel{(x+4)}} = x-4 \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

ÖRNEK

$\dfrac{4x^2-9}{6x-9}$ ifadesinin en sade şeklini bulunuz.

ÇÖZÜM

İfadenin payı iki kare farkı özdeşliği kullanılarak, paydası ortak çarpan parantezine alınarak çarpanlarına ayrılır ve daha sonra pay ve paydada bulunan ortak çarpanlar sadeleştirilirse

$$\frac{4x^2-9}{6x-9} = \frac{(2x)^2-3^2}{3\cdot(2x-3)} = \frac{\cancel{(2x-3)}\cdot(2x+3)}{3\cdot\cancel{(2x-3)}} = \frac{2x+3}{3}$$ bulunur.

ÖRNEK

$\dfrac{ax+9by-3ay-3bx}{2a-6b}$ ifadesinin en sade şeklini bulunuz.

ÇÖZÜM

$ax+9by-3ay-3bx = ax-3ay-3bx+9by = a\cdot(x-3y)-3b\cdot(x-3y) = (x-3y)\cdot(a-3b)$ ve
$2a-6b = 2\cdot(a-3b)$ olur.
Bu ifadeler rasyonel ifadede yerine yazılırsa

$$\frac{ax+9by-3ay-3bx}{2a-6b} = \frac{(x-3y)\cdot\cancel{(a-3b)}}{2\cdot\cancel{(a-3b)}} = \frac{x-3y}{2}$$ bulunur.

ÖRNEK

$\dfrac{x^3-4x}{x^2-1}\cdot\dfrac{x+1}{x^2+2x}$ ifadesinin en sade şeklini bulunuz.

ÇÖZÜM

$x^3-4x = x\cdot(x^2-4) = x\cdot(x^2-2^2) = x\cdot(x-2)\cdot(x+2)$,

$x^2-1 = x^2-1^2 = (x-1)\cdot(x+1)$ ve

$x^2+2x = x\cdot(x+2)$ olur.

Bu ifadeler rasyonel ifadede yerlerine yazılırsa

$$\frac{x^3-4x}{x^2-1}\cdot\frac{x+1}{x^2+2x} = \frac{\cancel{x}\cdot(x-2)\cdot\cancel{(x+2)}}{(x-1)\cdot\cancel{(x+1)}}\cdot\frac{\cancel{x+1}}{\cancel{x}\cdot\cancel{(x+2)}} = \frac{x-2}{x-1}$$ bulunur.

ÖRNEK

$\dfrac{(2x^2+3x+1)\cdot(x^2-x-6)}{(x^2-2x-3)\cdot(2x^2+5x+2)}$ ifadesinin en sade şeklini bulunuz.

ÇÖZÜM

$2x^2 + 3x + 1 = (2x+1)\cdot(x+1)$ olur.

$$\begin{matrix} 2x & & 1 \\ x & & 1 \end{matrix}$$

$x^2 - 2x - 3 = (x-3)\cdot(x+1)$ olur.

$$\begin{matrix} x & & -3 \\ x & & 1 \end{matrix}$$

$x^2 - x - 6 = (x-3)\cdot(x+2)$ olur.

$$\begin{matrix} x & & -3 \\ x & & 2 \end{matrix}$$

$2x^2 + 5x + 2 = (2x+1)\cdot(x+2)$ olur.

$$\begin{matrix} 2x & & 1 \\ x & & 2 \end{matrix}$$

$$\frac{(2x^2+3x+1)\cdot(x^2-x-6)}{(x^2-2x-3)\cdot(2x^2+5x+2)} = \frac{\cancel{(2x+1)}\cdot\cancel{(x+1)}\cdot\cancel{(x-3)}\cdot\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x-3)}\cdot\cancel{(x+1)}\cdot\cancel{(2x+1)}\cdot\cancel{(x+2)}}$$

$= 1$ bulunur.

ÖRNEK

$\dfrac{x^2-y^2}{x^2+2xy-3y^2} : \dfrac{x+y}{x+3y}$ ifadesinin en sade şeklini bulunuz.

ÇÖZÜM

$x^2 + 2xy - 3y^2 = (x-y)\cdot(x+3y)$ olur.

$$\begin{matrix} x & & -y \\ x & & 3y \end{matrix}$$

$x^2-y^2=(x-y)\cdot(x+y)$ olur.

$$\frac{x^2-y^2}{x^2+2xy-3y^2} : \frac{x+y}{x+3y} = \frac{\cancel{(x-y)}\cdot\cancel{(x+y)}}{\cancel{(x-y)}\cdot\cancel{(x+3y)}}\cdot\frac{\cancel{x+3y}}{\cancel{x+y}}$$

$= 1$ bulunur.

ÖRNEK

$\dfrac{x+5}{x^2-9x+8} : \dfrac{x^2-25}{2x-16}$ ifadesinin en sade şeklini bulunuz.

ÇÖZÜM

$x^2 - 9x + 8 = (x-1)\cdot(x-8)$ olur.

$$\begin{matrix} x & & -1 \\ x & & -8 \end{matrix}$$

$x^2-25=x^2-5^2=(x-5)\cdot(x+5)$ olur.

$2x-16=2\cdot(x-8)$ olur.

$$\frac{x+5}{x^2-9x+8} : \frac{x^2-25}{2x-16} = \frac{\cancel{x+5}}{(x-1)\cdot\cancel{(x-8)}}\cdot\frac{2\cdot\cancel{(x-8)}}{(x-5)\cdot\cancel{(x+5)}}$$

$= \dfrac{2}{(x-1)\cdot(x-5)}$ bulunur.

ÖRNEK

$\left(\frac{x-2}{x+2}-\frac{x}{x^2-4}\right)\cdot\frac{x^2+x-6}{x^2-x-12}$ ifadesinin en sade şeklini bulunuz.

ÇÖZÜM

$x^2 + x - 6 = (x+3)\cdot(x-2)$ olur.

$x \quad 3$
$x \quad -2$

$x^2 - x - 12 = (x+3)\cdot(x-4)$ olur.

$x \quad 3$
$x \quad -4$

$$\left(\frac{x-2}{x+2}-\frac{x}{x^2-4}\right)\cdot\frac{x^2+x-6}{x^2-x-12}=\left(\frac{x-2}{\underset{(x-2)}{x+2}}-\frac{x}{(x-2)\cdot(x+2)}\right)\cdot\frac{(x+3)\cdot(x-2)}{(x+3)\cdot(x-4)}$$

$$=\left(\frac{x^2-4x+4}{(x-2)\cdot(x+2)}-\frac{x}{(x-2)\cdot(x+2)}\right)\cdot\frac{(x+3)\cdot(x-2)}{(x+3)\cdot(x-4)}$$

$$=\left(\frac{x^2-5x+4}{(x-2)\cdot(x+2)}\right)\cdot\frac{(x+3)\cdot(x-2)}{(x+3)\cdot(x-4)}$$

$$=\frac{(x-1)\cdot\cancel{(x-4)}}{\cancel{(x-2)}\cdot(x+2)}\cdot\frac{\cancel{(x+3)}\cdot\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x+3)}\cdot\cancel{(x-4)}}$$

$$=\frac{x-1}{x+2}\text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$\left(\frac{x^4+8x^3+16x^2}{x^2-4x+3}:\frac{x^4+6x^3+8x^2}{x^3-x^2-6x}\right)\cdot\frac{x^2-5x+4}{x^3-16x}$ ifadesinin en sade şeklini bulunuz.

ÇÖZÜM

İfade ortak çarpan parantezine alınarak aşağıdaki gibi düzenlenir.

$$=\left[\frac{x^2\cdot(x^2+8x+16)}{x^2-4x+3}\cdot\frac{x\cdot(x^2-x-6)}{x^2\cdot(x^2+6x+8)}\right]\cdot\frac{x^2-5x+4}{x\cdot(x^2-16)}$$

Üç terimli ifadeler ve iki kare farkı özdeşliği çarpanlarına ayrılır.

$x^2 + 8x + 16 = (x+4)\cdot(x+4)$ olur.

$x \quad 4$
$x \quad 4$

$x^2 - 4x + 3 = (x-1)\cdot(x-3)$ olur.

$x \quad -1$
$x \quad -3$

$x^2 - x - 6 = (x+2)\cdot(x-3)$ olur.

$x \quad 2$
$x \quad -3$

$x^2 + 6x + 8 = (x+2)\cdot(x+4)$ olur.

$x \quad 2$
$x \quad 4$

$x^2 - 5x + 4 = (x-4)\cdot(x-1)$ olur.

$x \quad -4$
$x \quad -1$

$x^2 - 16 = (x-4)\cdot(x+4)$ olur.

Çarpanlarına ayrılmış ifadeler aşağıdaki gibi yerine yazılır ve sadeleştirilir.

$$=\frac{\cancel{x^2}\cdot\cancel{(x+4)}\cdot\cancel{(x+4)}}{\cancel{(x-1)}\cdot\cancel{(x-3)}}\cdot\frac{\cancel{x}\cdot\cancel{(x+2)}\cdot\cancel{(x-3)}}{\cancel{x^2}\cdot\cancel{(x+2)}\cdot\cancel{(x+4)}}\cdot\frac{\cancel{(x-4)}\cdot\cancel{(x-1)}}{\cancel{x}\cdot\cancel{(x-4)}\cdot\cancel{(x+4)}}$$

$= 1$ bulunur.

ALIŞTIRMALAR

1. $8 \cdot 12 + 13 \cdot 8 - 5 \cdot 8$ ifadesinin değerini bulunuz.

2. $xn - yn + xm - ym$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.

3. $x = 24$ ve $y = 21$ olduğuna göre $x^2 - 2xy + y^2$ ifadesinin değerini bulunuz.

4. $\dfrac{x^2 - 6x}{7x - 42}$ ifadesinin sadeleştirilmiş biçimini bulunuz.

5. $\dfrac{x^3 - 9x}{x^2 + 3x}$ ifadesinin sadeleştirilmiş biçimini bulunuz.

6. $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 2x - 3}$ ifadesinin sadeleştirilmiş biçimini bulunuz.

7. $\dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + 3x + 2} \cdot \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 7x + 12}$ ifadesinin sadeleştirilmiş biçimini bulunuz.

8. $\left(\dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{1}{x + 1}\right) \cdot \left(x - \dfrac{1}{x}\right)$ işleminin sonucunu bulunuz.

9. $\dfrac{x^2 + 4x - 12}{x^2 - 36} \cdot \dfrac{6x - x^2}{x^2 - 2x}$ ifadesinin sadeleştirilmiş biçimini bulunuz.

10. $\dfrac{2x^2 + 7x - 4}{2x - 1}$ ifadesinin sadeleştirilmiş biçimini bulunuz.

11. $\dfrac{4a^2 - b^2}{2a^2 + 3ab - 2b^2} : \dfrac{2a^2 + ab}{a^2b + 2ab^2}$ ifadesinin sadeleştirilmiş biçimini bulunuz.

12. $\dfrac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2 - 2x + 1}$ ifadesinin sadeleştirilmiş biçimini bulunuz.

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

A) *1- 5. cümlelerde boş bırakılan yerlere uygun sözcükleri yazınız.*

1. Sabit polinomun derecesi .... sıfır polinomun derecesi .... olur.

2. $P(x) = 2x^2 - x^3 + 3x - 5$ polinomunun derecesi .... ve başkatsayısı .... olur.

3. $der[P(x)] = 4$ olduğuna göre $der[P^2(x^3)] =$ .... olur.

4. $P(x-3) = x^2 - 2x + 1$ olduğuna göre P(x) polinomunun sabit terimi ...., katsayılar toplamı .... olur.

5. $x^2 - 3x - 4$ ifadesinin çarpanlarından biri ...., diğeri .... olur.

B) *6. soruda verilen ifadelerden doğru olanların başına D, yanlış olanların başına Y yazınız.*

6. ( ) $(a+b)^2$ ve $a^2 - b^2$ ifadelerinin ortak çarpanı $a+b$ çarpanıdır.

( ) $P(x+2)$ polinomunun katsayıları toplamı ile sabit teriminin toplamı $P(3)+P(2)$ değeridir.

( ) $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$ eşitliği her a ve b reel sayısı için sağlanır.

( ) $(2x-1)^3$ ifadesinin katsayılar toplamı ile $(x+2)^2$ ifadesinin katsayılar toplamı aynıdır.

( ) Bir $P(x)$ polinomu $ax+b$ gibi bir polinoma bölünürse kalan daima sabit bir reel sayı bulunur.

( ) $P(x) = \frac{1}{5}x^2 - \sqrt{3}x + \frac{2}{7}$ ifadesi bir polinom belirtir.

C) *7. soruda numaralı ifadeler ile harfli ifadeleri eşleştirerek doğru cevapları ilgili kutucuklara yazınız.*

7.

I. $\dfrac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 5x + 4}$

II. $\dfrac{x^2 - 6x + 16}{x - 8}$

III. $(x+2)^2 - 4x$

IV. $(x+2) \cdot (x-2)$

V. $(x+8) \cdot (x+2)$

a. $x+2$

b. $x^2 - 4$

c. $\dfrac{x+2}{x-1}$

d. $(x+4)^2 + 2x$

e. $x^2 + 4$

f. $x-2$

I.	II.	III.	IV.	V.

Ç) ***8-12. açık uçlu soruları cevaplandırınız.***

8. $P(x) = -5x^{n-5} + 3x^{\frac{12}{n}} + 4$ ifadesi bir polinom olduğuna göre n nin alabileceği değerler toplamını bulunuz.

9. $P(x) = (x^2 - 2x - 3) \cdot (4x^2 - 5x + 6)$
$Q(x) = 4x^4 + mx^3 + nx^2 + 3x - 18$
polinomları veriliyor. $P(x) = Q(x)$ olduğuna göre $m + n$ toplamının değerini bulunuz.

10. $a - b = b - c = 5$ olduğuna göre $a^2 - b^2 + 2bc - 2ac$ ifadesinin değerini bulunuz.

11. $P(x-2) = x^2 - 3x - 5$ olduğuna göre $P(x-5)$ polinomunun $x - 7$ ile bölümünden kalanı bulunuz.

12. $\dfrac{a^2 + 2a(1-b) - 4b}{a^2 + a(3-2b) - 6b}$ ifadesinin en sade şeklini bulunuz.

D) ***13-43. çoktan seçmeli soruların doğru seçeneklerini işaretleyiniz.***

13. $P(x) = (b-4)x^4 - 5x + 2x^{2a-7} + 2$

polinomu 3. dereceden bir polinom olduğuna göre $a-b$ kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

14. $P(x) = (a-3)x^2 + (a+b)x + 4a - 2b$

polinomu sabit polinom olduğuna göre $P(0)$ kaçtır?

A) 14 B) 16 C) 18 D) 20 E) 22

15. $P(x) = (a-3)x^4 + (3b-12)x + a + b - c$

polinomu sıfır polinom olduğuna göre c kaçtır?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

16. $P(x) = \dfrac{mx+9}{2x+3}$

polinomu sabit polinom olduğuna göre $P(1)$ kaçtır?

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

17. $P(x)$ sabit polinom, $Q(x)$ sıfır polinom ve $P(x) + Q(x) = 5$ olduğuna göre $P(4)$ kaçtır?

A) 4 B) 5 C) 10 D) 15 E) 20

18. $\dfrac{5x}{x^2+x-6} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{x+3}$

olduğuna göre $A+B$ kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

19. $P(x) = 5x^2 + 3x + ax + 4$
$Q(x) = (b - 1)x^2 + 5x + a + c + 1$

polinomları veriliyor.

$P(x) = Q(x)$ olduğuna göre $a + b + c$ kaçtır?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

20. $P(x + 3) = x^2 - 3x + 4$

polinomu veriliyor.

Buna göre $P(x + 2)$ polinomunun katsayılar toplamı kaçtır?

A) 4 B) 5 C) 7 D) 9 E) 10

21. $P(x - 2) = 3x^2 - 2x + 1$

polinomu veriliyor.

Buna göre $P(x + 1)$ polinomunun sabit terimi kaçtır?

A) 1 B) 8 C) 14 D) 22 E) 34

22. $\text{der}[P(x) \cdot Q(x)] = 12$ ve $\text{der}\left[\dfrac{P(x)}{Q(x)}\right] = 2$

olduğuna göre $Q(x)$ polinomunun derecesi kaçtır?

A) 2 B) 5 C) 8 D) 10 E) 12

23. $(2x^2 + x - 1) \cdot (3x + 2)$

işlemi yapıldığında x^2 li terimin katsayısı kaç olur?

A) 1 B) 4 C) 7 D) 11 E) 15

24. $\mathbf{P(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 2}$

polinomunun $x^2 - 3x + 3$ ile bölümünden elde edilen bölüm nedir?

A) $x + 1$ B) $x + 2$ C) $x + 5$

D) $x + 7$ E) $x + 9$

25. $P(x) = 5x^2 - 2x + 1$

polinomunun $2x - 4$ ile bölümünden kalan nedir?

A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

26. $\dfrac{x^2}{x^2 + 5x + 6} \cdot \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - x}$

ifadesinin en sade biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\dfrac{1}{5x+6}$ B) $\dfrac{x}{x+3}$ C) $\dfrac{x}{x+2}$

D) $\dfrac{1}{x+2}$ E) $\dfrac{1}{3}$

27. $\dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 6x + 9} \cdot \dfrac{2x - 6}{4x + 12}$

ifadesinin en sade biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\dfrac{1}{x}$ B) $\dfrac{1}{x+3}$ C) 1

D) $\dfrac{1}{2}$ E) $\dfrac{1}{4}$

28. $\dfrac{x^2 + x - 20}{x^2 - x - 12} \cdot \dfrac{x^2 - xy + 3x - 3y}{x^2 + xy + 5x + 5y}$

ifadesinin en sade biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\dfrac{x+5}{x-4}$ B) $\dfrac{x-3}{x+5}$ C) $\dfrac{x-y}{x+y}$

D) $\dfrac{x+5}{x-3}$ E) 1

29. $\dfrac{x^2 - x - 42}{2x^2 - 9x - 35} \cdot \dfrac{6x^2 + 15x}{x^2 + 6x}$

ifadesinin en sade hâli aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) $2x + 5$ C) $\dfrac{3}{x}$

D) $\dfrac{x+6}{x-7}$ E) 3

30. $\left(\dfrac{5}{x+2} - \dfrac{3}{x+1}\right) : \dfrac{2x - 1}{x^2 + 3x + 2}$

ifadesinin en sade biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\dfrac{1}{2x-1}$ B) 1 C) $\dfrac{2}{x+2}$

D) $x - 1$ E) $\dfrac{1}{x}$

31. $$\frac{6x^2+x-1}{2x^2+x}-\frac{1}{x}$$

ifadesinin en sade biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

32. $a \cdot b = 3$ olmak üzere

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{5}{a-b}$$

olduğuna göre $a^2 - b^2$ kaçtır?

A) 3 B) 5 C) 8 D) 15 E) 21

33. $$\frac{x}{x-2}+\frac{3}{x-3}-\frac{x}{x^2-5x+6}$$

ifadesinin en sade biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{x+2}{x-2}$ B) $\frac{x-2}{x-3}$ C) $\frac{x-3}{x+3}$

D) $\frac{x+3}{x-3}$ E) $\frac{x-3}{x-2}$

34. $$\frac{(x+2)^2-(x-1)^2}{4x^2+4x+1}\cdot\frac{2x^2-3x-2}{3x-6}$$

ifadesinin en sade biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

35. $$\frac{\frac{x}{y^2}-\frac{1}{y}}{\frac{x^2}{y^2}-1}$$

ifadesinin en sade biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

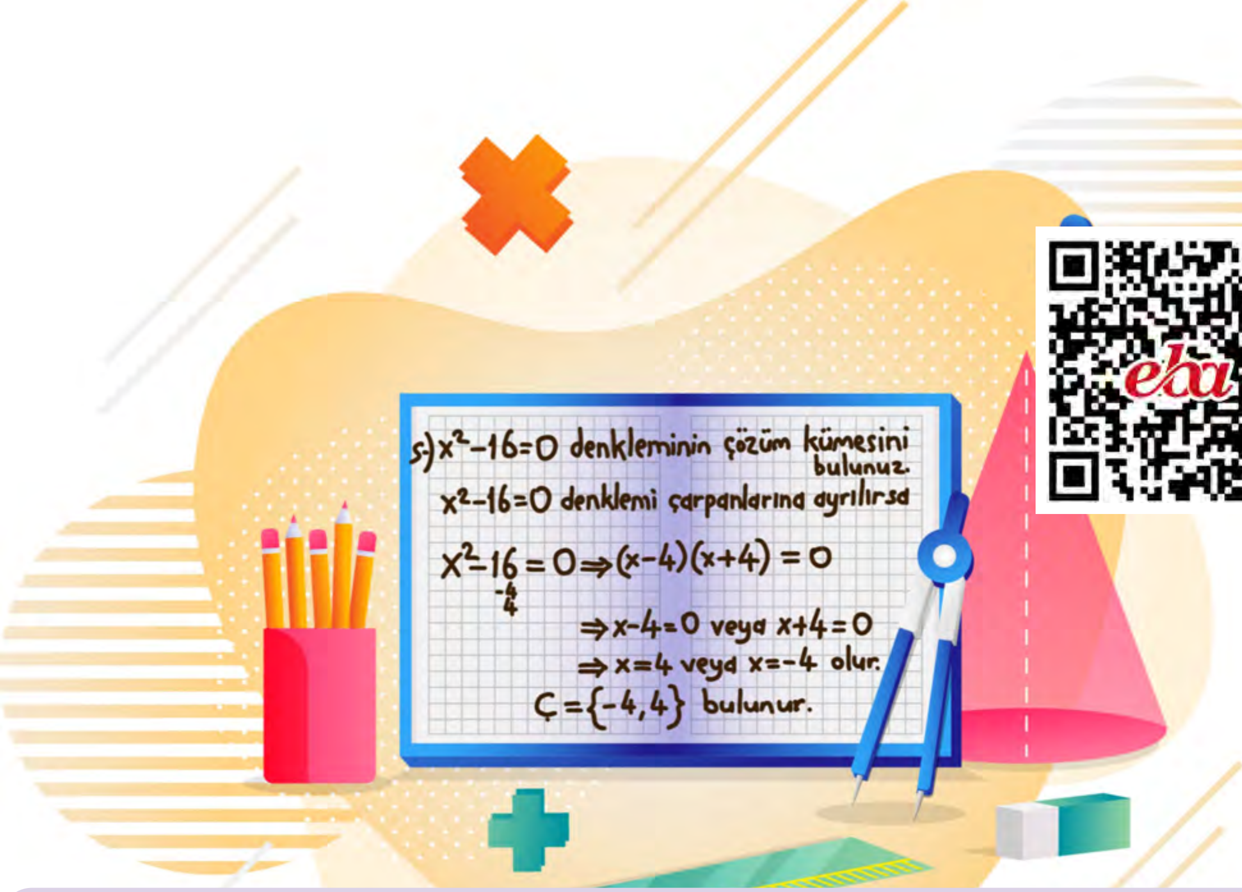
A) $x+y$ B) $x-y$ C) 1

D) $\frac{1}{x-y}$ E) $\frac{1}{x+y}$

36. $$\frac{a-\frac{2}{a-1}}{1-\frac{2}{a}}-\frac{a^2+a}{a-1}$$

ifadesinin en sade biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4



12.2. İKİNCİ DERECEDEN DENKLEMLER

KAZANIMLAR

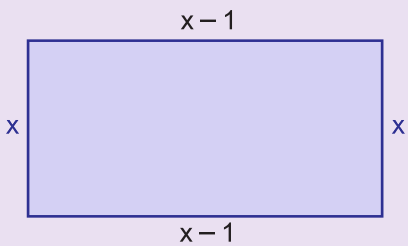
12.1.1. İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemler

Bu ünitede ikinci dereceden bir bilinmeyen denklem, denklemin kökü, kökler toplamı, kökler çarpımı, diskriminant, karmaşık sayı, eşlenik. kavramlarını öğreneceksiniz.

HAZIRLIK ÇALIŞMASI

1. "$a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $P(x) = 2x - 4$ ve $Q(x) = x^2 - 8x + 15$ polinomlarının sıfırları" ifadesinden ne anladığınızı tartışınız.

2.



$x^2 - x - 6 = 0$ ve $x^2 + 4x - 1 = 0$ ifadelerini çarpanlarına ayırınız. $x > 1$ olmak üzere yandaki dikdörtgenin alanı ile hangi ifadenin ilişkili olduğunu tartışınız. Dikdörtgenin alanını cebirsel ifade olarak belirleyiniz.

3. Balıkesir Huzurevi Yaşlı Bakım ve Rehabilitasyon Merkezi'ni ziyaret etmek isteyen iki öğrencinin yaşları toplamı 28 ve yaşları çarpımı 195 dir. Buna göre yaşı küçük olan öğrencinin yaşını bulunuz.

12.2.1. İKİNCİ DERECEDEN BİR BİLİNMEYENLİ DENKLEMLER

12.2.1.1. İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemlerin Çözümü

$a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N}$ Denklem kavramı; eski çağlardan bugüne günlük hayatta ihtiyaç duyulan, birçok ölçme ve hesaplamayı yapmada araç olarak kullanılan önemli matematik yapılarından biridir. Matematik ile ilgili eserler incelendiğinde denklemlerin en çok karşılaşılan matematiksel yapılardan biri olduğu görülmektedir. MÖ 1700-1600 yıllarından kalan eski Mısır papirüsleri üzerindeki bazı basit denklemler kaynaklarda kullanılan ilk denklem örnekleridir. MÖ 300'lü yıllarda yaşayan Euclid (Öklid) ve cebirsel formülleri ilk olarak kullanan Diophantus (Diofantos) $xy = k^2$, $x + y = a$, $x^2 - y^2 = a^2$ biçimindeki denklemlerin çözümlerini araştırmışlardır. Benzer şekilde Hintli matematikçi ve gök bilimci Brahmagupta (597-668), denklemler yardımıyla birçok problemi çözerek kendisinden sonraki matematikçilere yol açmıştır. Yaptığı çalışmalar ile cebir biliminin temellerini atan Türk-İslam matematikçisi Harezmî'nin (780-850) yazdığı "Kitâbü'l-Cebr-ve'l-Mukâbele" adlı kitap birinci ve ikinci dereceden denklemlerin sistematik çözümlerinin yer aldığı ilk eser olma özelliğini taşımaktadır. Bir dönem bulunduğu Hindistan'da sayıları ifade etmek için harf ya da heceler yerine basamaklı sayı sisteminin kullanıldığını saptayan Harezmî'nin bu konuda yazdığı kitap ise "Algoritmi de Numeroindorum" adıyla Latinceye tercüme edilmiştir. Bu nedenle Harezmî (Diophantus ile birlikte) cebrin kurucusu olarak kabul edilmektedir. İngilizcedeki algebra ve bunun Türkçedeki karşılığı cebir sözcüğü, Harezmî'nin kitabındaki ikinci dereceden denklemleri çözme yöntemlerinden biri olan el-cebrden gelmektedir. Harezmî'nin çağdaşı olan büyük matematikçilerden Abdülhamid İbn Türk'ün de cebir bilimine önemli katkıları olmuştur. İbn Türk, yazdığı eserlerde özellikle $ax^2 + c = bx$ denkleminin bazı özel hâllerini Harezmî'den daha ayrıntılı bir şekilde ortaya koymuştur.

Denklemler matematiğin hemen her alanında ayrıca astronomi, bilgisayar programcılığı, tıp vb. bilim alanlarında kullanılmaktadır. İslamiyet'in başlangıç yıllarında dinî günlerin tespiti, namaz vakitlerinin belirlenmesi, takvim hazırlanması, veraset hesapları, yükseklik tayini ve günlük yaşantı için gerekli birçok pratik ölçme ve hesaplama için denklemlerden yararlanılmıştır. Denklem kavramının kökeni Latince aequationemdan gelmektedir. Kelimenin sözlük anlamına bakıldığında aşağıdaki tanımlara rastlanmaktadır.

İçinde yer alan kimi niceliklere ancak uygun bir değer verildiği zaman sağlanabilen eşitlik, muadele.

Bir yanında olaya giren çeşitli maddelerin formülleri, öteki yanında da tepkime sonucu oluşan yeni maddelerin formülleri bulunan eşitlik.

(Argün, Z., ArıkanT., Bulut, S. (2014). Matematik Kavramların Künyesi.)


Antik Mısır papirüsü ve hiyeroglif


Harezmî


Brahmagupta


Abdülhamid İbn Türk

$a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ denklemine ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem denir. $ax^2 + bx + c = 0$ denklemindeki a, b, c gerçek sayılarına denklemin katsayıları; x e denklemin bilinmeyeni denir. Denklemi sağlayan gerçek sayılara denklemin kökleri, köklerin kümesine denklemin çözüm kümesi denir ve Ç harfi ile gösterilir.

Aşağıda ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemler ve denklemlere ait katsayılar verilmiştir.

» $3x^2 + 2x - 3 = 0$ denkleminin katsayıları $a = 3,\ b = 2$ ve $c = -3$ sayılarıdır.

» $-2x^2 + \frac{1}{3} = 0$ denkleminin katsayıları $a = -2,\ b = 0$ ve $c = \frac{1}{3}$ sayılarıdır.

» $6x^2 = 0$ denkleminin katsayıları $a = 6,\ b = 0$ ve $c = 0$ sayılarıdır.

ÖRNEK

Aşağıda verilen denklemlerin ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem belirtip belirtmediğini bulunuz.

a) $5x^2 - 3x + 7 = 0$

b) $x^2 + 2x^3 - 4 = 0$

c) $2x - 3x^2 - 1 = 0$

ç) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

ÇÖZÜM

a) $5x^2 - 3x + 7 = 0$ denkleminde en büyük dereceli terim $5x^2$ olduğundan ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem belirtir.

b) $x^2 + 2x^3 - 4 = 0$ denkleminde en büyük dereceli terim $2x^3$ olduğundan ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem belirtmez. Üçüncü dereceden bir bilinmeyenli denklem belirtir.

c) $2x - 3x^2 - 1 = 0$ denkleminde en büyük dereceli terim $-3x^2$ olduğundan ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem belirtir.

ç) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ denkleminde en büyük dereceli terim x^4 olduğundan ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem belirtmez. Dördüncü dereceden bir bilinmeyenli denklem belirtir.

ÖRNEK

$m, n \in \mathbb{R}$ olmak üzere $(m - 4)x^3 + 5x^{n-3} + 2x - 1 = 0$ denklemi, x değişkenine bağlı ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem olduğuna göre $m + n$ toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

Eşitliğin ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem olabilmesi için x^3 lü terimin katsayısının 0 olması gerekir. $m - 4 = 0$ eşitliğinden $m = 4$ olur. x^2 li terimin olması için $n - 3 = 2$ eşitliğinden $n = 5$ olur.

$m + n = 4 + 5 = 9$ bulunur.

$ax^2 + bx + c = 0$ denklemi çarpanlarına ayrıldıktan sonra her bir çarpan sıfıra eşitlenerek x değerleri bulunur. Bulunan x değerleri denklemin kökleridir.

ÖRNEK

$x^2 - 16 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$x^2 - 16 = 0$ denklemi çarpanlarına ayrılırsa

$x^2 - 16 = 0 \Rightarrow (x-4)\cdot(x+4) = 0$

$\begin{matrix} -4 \\ 4 \end{matrix}$

$\Rightarrow x - 4 = 0$ veya $x + 4 = 0$

$\Rightarrow x_1 = 4$ veya $x_2 = -4$ olur.

Buna göre verilen denklemin çözüm kümesi $Ç = \{-4, 4\}$ bulunur.

ÖRNEK

$4x^2 - 5x = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$4x^2 - 5x = 0$ denklemi x parantezine alınırsa

$4x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x\cdot(4x-5) = 0$

$\Rightarrow x = 0$ veya $4x - 5 = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0$ veya $x_2 = \frac{5}{4}$ olur.

Buna göre verilen denklemin çözüm kümesi $Ç = \left\{0, \frac{5}{4}\right\}$ bulunur.

ÖRNEK

$x^2 - 7x + 12 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$x^2 - 7x + 12 = 0$ denklemi çarpanlarına ayrılırsa

$x^2 - 7x + 12 = 0 \Rightarrow (x-3)\cdot(x-4) = 0$

$\begin{matrix} -3 \\ -4 \end{matrix}$

$\Rightarrow x - 3 = 0$ veya $x - 4 = 0$

$\Rightarrow x_1 = 3$ veya $x_2 = 4$ olur.

Buna göre verilen denklemin çözüm kümesi $Ç = \{3, 4\}$ bulunur.

ÖRNEK

$3x^2 + 13x - 10 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$3x^2 + 13x - 10 = 0 \Rightarrow (3x-2)\cdot(x+5) = 0$

$\begin{matrix} 3x & & -2 \\ x & & 5 \end{matrix}$

$\Rightarrow 3x - 2 = 0$ veya $x + 5 = 0$

$\Rightarrow x_1 = \frac{2}{3}$ veya $x_2 = -5$ olur.

Buna göre verilen denklemin çözüm kümesi $Ç = \left\{-5, \frac{2}{3}\right\}$ bulunur.

İkinci dereceden bir denklemin iki kökü birbirine eşit ise çözüm kümesi tek elemanlıdır.

ÖRNEK

$3x^2 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$3x^2 = 0$ denklemi çarpanlarına ayrılırsa

$$\begin{aligned} 3x^2 = 0 &\Rightarrow x^2 = 0 \\ &\Rightarrow x \cdot x = 0 \\ &\Rightarrow x_1 = 0 \text{ veya } x_2 = 0 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Buna göre verilen denklemin çözüm kümesi $Ç = \{0\}$ bulunur.

ÖRNEK

$x^2 + 6x + 9 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$x^2 + 6x + 9 = 0$ denklemi çarpanlarına ayrılırsa

$$x^2 + 6x + \underset{\substack{3\\3}}{9} = 0 \Rightarrow (x+3)\cdot(x+3) = 0$$

$$\Rightarrow x + 3 = 0 \text{ veya } x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = -3 \text{ veya } x_2 = -3 \text{ olur.}$$

Buna göre verilen denklemin çözüm kümesi $Ç = \{-3\}$ bulunur.

İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemlerin Genel Çözümü ve Diskriminant Kavramı (Δ)

$a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin genel çözümü aşağıdaki adımlar uygulanarak yapılır.

» Denklem x^2 nin katsayısı 1 olacak şekilde düzenlenir.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

» Denklemi tamkareye tamamlamak için x in katsayısının yarısının karesi denkleme eklenir ve çıkarılır.

$$\underbrace{x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2}_{\text{tamkare ifade}} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

» Tamkareye tamamlanan kısım yalnız bırakılır ve eşitliğin her iki yanının karekökü alınır.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \underset{(4a)}{\frac{c}{a}} = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$\Rightarrow \left|x + \frac{b}{2a}\right| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|2a|}$$

» Eşitlik mutlak değer dışına çıkarılır ve denklemin kökleri bulunur.

$$x+\frac{b}{2a}=-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ veya } x+\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ olur.}$$

$$x_1=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ veya } x_2=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ olur.}$$

» $\triangle=b^2-4ac$ ifadesine ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemin diskriminantı denir. $\triangle$ ifadede yerine yazılır.

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\triangle}}{2a} \text{ veya } x_2=\frac{-b+\sqrt{\triangle}}{2a} \text{ bulunur.}$$

$a, b, c\in\mathbb{R}$ ve $a\neq 0$ olmak üzere $ax^2+bx+c=0$ denkleminin kökleri

$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\triangle}}{2a}$ ve $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\triangle}}{2a}$ olduğuna göre bu köklerin gerçek sayı olup olmadığı $\triangle=b^2-4ac$ nin alacağı değere göre belirlenir.

- $\triangle>0$ ise denklemin farklı iki gerçek kökü vardır. Bu kökler
  $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\triangle}}{2a}$ ve $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\triangle}}{2a}$ olur.
- $\triangle=0$ ise denklemin $x_1=x_2$ gibi (çakışık-çift katlı) iki gerçek kökü vardır. Bu kökler
  $x_1=x_2=\dfrac{-b}{2a}$ olup denklemin çözüm kümesi bir elemanlıdır.
- $\triangle<0$ ise denklemin gerçek sayılar kümesinde kökü yoktur. Denklemin gerçek sayılar kümesinde çözüm kümesi boş kümedir.

biçimindedir.

ÖRNEK

$x^2-4x+3=0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$x^2-4x+3=0$ ifadesinde $a=1,\ b=-4$ ve $c=3$ katsayıları $\triangle=b^2-4ac$ ifadesinde yerine yazılır ve $\triangle=(-4)^2-4\cdot1\cdot3=4$ bulunur.

$\triangle=4>0$ olduğundan denklemin iki farklı gerçek kökü vardır.

Bu kökler

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\triangle}}{2a}=\frac{-(-4)-\sqrt{4}}{2\cdot1}=\frac{4-2}{2}=\frac{2}{2}=1 \text{ veya}$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\triangle}}{2a}=\frac{-(-4)+\sqrt{4}}{2\cdot1}=\frac{4+2}{2}=\frac{6}{2}=3 \text{ olur.}$$

Buna göre verilen denklemin çözüm kümesi $Ç=\{1,3\}$ bulunur.

ÖRNEK

$x^2-4x+1=0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$x^2-4x+1=0$ ifadesinde $a=1,\ b=-4$ ve $c=1$ katsayıları $\triangle=b^2-4ac$ ifadesinde yerine yazılır ve $\triangle=(-4)^2-4\cdot1\cdot1=12$ bulunur.

$\triangle=12>0$ olduğundan denklemin iki farklı gerçek kökü vardır.
Bu kökler

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\triangle}}{2a}=\frac{-(-4)-\sqrt{12}}{2\cdot1}=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=\frac{\cancel{2}\cdot(2-\sqrt{3})}{\cancel{2}}=2-\sqrt{3}\ \text{ veya}$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\triangle}}{2a}=\frac{-(-4)+\sqrt{12}}{2\cdot1}=\frac{4+2\sqrt{3}}{2}=\frac{\cancel{2}\cdot(2+\sqrt{3})}{\cancel{2}}=2+\sqrt{3}\ \text{ olur.}$$

Buna göre verilen denklemin çözüm kümesi $Ç=\{2-\sqrt{3},2+\sqrt{3}\}$ bulunur.

ÖRNEK

$x^2-8x+16=0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$x^2-8x+16=0$ ifadesinde $a=1,\ b=-8$ ve $c=16$ katsayıları $\triangle=b^2-4ac$ ifadesinde yerine yazılır ve $\triangle=(-8)^2-4\cdot1\cdot16=0$ bulunur.
$\triangle=0$ olduğundan denklemin $x_1=x_2$ gibi çakışık iki gerçek kökü vardır.

$$x_1=x_2=\frac{-b}{2a}=\frac{-(-8)}{2\cdot1}=\frac{8}{2}=4\ \text{ olur.}$$

Buna göre verilen denklemin çözüm kümesi $Ç=\{4\}$ bulunur.

ÖRNEK

$x^2+2x+3=0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$x^2+2x+3=0$ ifadesinde $a=1,\ b=2$ ve $c=3$ katsayıları $\triangle=b^2-4ac$ ifadesinde yerine yazılır ve $\triangle=2^2-4\cdot1\cdot3=-8$ bulunur. $\triangle=-8<0$ olduğundan denklemin gerçek kökü yoktur.
Buna göre verilen denklemin çözüm kümesi $Ç=\{\ \}$ bulunur.

ÖRNEK

$a\in\mathbb{R}$ olmak üzere $x^2+(a+2)x-2a+1=0$ denkleminin köklerinden biri 1 olduğuna göre diğer kökünü bulunuz.

ÇÖZÜM

Denklemin verilen kökü, denklemi sağlayacağından denklemde x değişkeni yerine 1 yazılır ve a değeri bulunur. $1^2+(a+2)\cdot1-2a+1=0\Rightarrow-a+4=0\Rightarrow a=4$ olur. Bulunan a değeri denklemde yerine yazılırsa $x^2+6x-7=0$ denklemi elde edilir.

$x^2+6x-7=0\Rightarrow(x-1)\cdot(x+7)=0\ \Rightarrow x-1=0$ veya $x+7=0$
-1
7
$\Rightarrow x_1=1$ veya $x_2=-7$ olur.

Buna göre verilen denklemin diğer kökü -7 bulunur.

ÖRNEK

$n \neq 0$ ve $n \in \mathbb{R}$ olmak üzere $nx^2 - 2(n-3)x + n + 6 = 0$ denkleminin birbirine eşit iki kökünün olabilmesi için n nin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Denklemin kökleri eşit ise $\triangle = 0$ olmalıdır. $a = n,\ b = -2(n-3)$ ve $c = n + 6$ olduğundan

$$\begin{aligned}\triangle = b^2 - 4ac = 0 &\Rightarrow [-2(n-3)]^2 - 4n(n+6) = 0\\ &\Rightarrow 4(n^2 - 6n + 9) - 4n^2 - 24n = 0\\ &\Rightarrow \cancel{4n^2} - 24n + 36 - \cancel{4n^2} - 24n = 0\\ &\Rightarrow -48n + 36 = 0\\ &\Rightarrow n = \frac{3}{4} \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

ÖRNEK

$m \neq 1$ ve $m \in \mathbb{R}$ olmak üzere $(m-1)x^2 - 2mx + m - 4 = 0$ denkleminin birbirinden farklı iki gerçek kökünün olabilmesi için m nin alabileceği en küçük tam sayı değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Denklemin farklı iki gerçek kökünün olması için $\triangle > 0$ olmalıdır.
$a = m - 1,\ b = -2m$ ve $c = m - 4$ olduğundan

$$\begin{aligned}b^2 - 4ac > 0 &\Rightarrow (-2m)^2 - 4(m-1)(m-4) > 0\\ &\Rightarrow 4m^2 - 4(m^2 - 5m + 4) > 0\\ &\Rightarrow \cancel{4m^2} - \cancel{4m^2} + 20m - 16 > 0\\ &\Rightarrow 20m > 16\\ &\Rightarrow m > \frac{4}{5} \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

$m = 1$ değeri için ifade ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem olmadığından m nin en küçük tam sayı değeri 2 bulunur.

ÖRNEK

$m \in \mathbb{R}$ olmak üzere $2x^2 + 4x + 7 - m = 0$ denkleminin gerçek köklerinin olmaması için m nin alabileceği doğal sayı değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Denklemin gerçek köklerinin olmaması için $\triangle < 0$ olmalıdır.

$$\begin{aligned}b^2 - 4ac < 0 &\Rightarrow 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot (7 - m) < 0\\ &\Rightarrow 16 - 8 \cdot (7 - m) < 0\\ &\Rightarrow 16 - 56 + 8m < 0\\ &\Rightarrow -40 + 8m < 0\\ &\Rightarrow 8m < 40\\ &\Rightarrow m < 5 \text{ olur.}\end{aligned}$$

Buna göre m nin doğal sayı değerleri 0, 1, 2, 3 ve 4 bulunur.

ALIŞTIRMALAR

1. $x^2 + 8x - 20 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

2. $x^2 - 25 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

3. $4x^2 + 12x + 9 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

4. $6x^2 - 7x - 20 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

5. $x^2 + \frac{2x}{3} + \frac{1}{9} = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

6. Aşağıdaki denklemlerin diskriminantlarını bulunuz.

   a) $4x^2 - 2x - 5 = 0$ b) $2x^2 - 5x + 3 = 0$ c) $a \in \mathbb{R},\ x^2 - ax + a - 1 = 0$

4. $m \neq 0$ ve $m \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x^2 + (m + 2)x - 2m + 1 = 0$ denkleminin diskriminantı 0 ve kökü x_1 olduğuna göre $m + x_1$ toplamının değerini bulunuz.

5. $m \neq 2$ ve $m \in \mathbb{R}$ olmak üzere $(m - 2)x^2 - (m - 1)x + 1 = 0$ denkleminin bir kökü $x_1 = -2$ olduğuna göre $m \cdot x_2$ çarpımının değerini bulunuz.

6. $m \neq -2$ ve $m \in \mathbb{R}$ olmak üzere $(m + 2)x^2 - 6x + 6 = 0$ denkleminin birbirinden farklı iki gerçek kökü olduğuna göre m nin en büyük tam sayı değerini bulunuz.

7. $x^2 + (m + 2)x + m + 2 = 0$ denkleminin eşit iki gerçek kökü olduğuna göre m nin pozitif değerini bulunuz.

8. $2x^2 - 4x + m - 5 = 0$ denkleminin gerçek kökü olmadığına göre m nin en küçük tam sayı değerini bulunuz.

9. $m \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x^2 + (m - 1)x + m - 2 = 0$ denkleminin diskriminantını sıfır yapan m gerçek sayısı için $x^2 - (m + 1)x + m = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

10. $m \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x^2 - 6x + 9 = 0$ denkleminin kökü $x^2 + 2mx + m^2 - 1 = 0$ denklemini sağladığına göre m değerlerini bulunuz.

11. $(5a - 1)(a + 1) + (5a - 1)(a - 2) = 0$ eşitliğini sağlayan a gerçek sayılarının toplamını bulunuz.

12.2.1.2. Bir Karmaşık Sayının $a+ib\ (a,b\in\mathbb{R})$ Biçiminde Yazılması

Karmaşık Sayılar

$x^2-1=0$ ikinci dereceden bir bilinmeyenli denkleminin gerçek sayılarda çözümü yapıldığında

$$x^2-1=0$$
$$x^2=1$$
$$\sqrt{x^2}=\sqrt{1}$$
$$|x|=1\Rightarrow x_1=-1 \text{ veya } x_2=1 \text{ olur.}$$

$x^2-1=0$ denkleminin gerçek sayılarda çözüm kümesi $Ç=\{-1,1\}$ bulunur.

$x^2+1=0$ ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi çözülmek istendiğinde

$$x^2+1=0$$
$$x^2=-1$$

eşitliğini sağlayan hiçbir gerçek sayı bulunamaz. O hâlde bu tür denklemlerin çözülebileceği yeni bir sayı sistemine gerek duyulmuştur.

$a,\ b\in\mathbb{R}$ ve $i=\sqrt{-1}\ (i^2=-1)$ olmak üzere $z=a+ib$ biçimindeki sayılara karmaşık (kompleks) sayı denir. Karmaşık sayılar kümesi $\mathbb{C}=\{z\,|\,z=a+ib \text{ ve } a,b\in\mathbb{R}, \text{ ve } i=\sqrt{-1}\}$ biçimindedir. Karmaşık sayılar kümesinin elemanları $z,\ z_1,\ z_2,\ w,\ u,\ ...$ gibi harfler ile gösterilir.

$z=a+ib$ karmaşık sayısında

- a sayısına, z karmaşık sayısının gerçek kısmı denir ve $\mathbf{Re(z)=a}$ şeklinde gösterilir.
- b sayısına, z karmaşık sayısının sanal (imajiner) kısmı denir ve $\mathbf{Im(z)=b}$ şeklinde gösterilir.

$z=a+ib$ karmaşık sayısında $b=0$ için z karmaşık sayısının sanal kısmı 0 ve $z=a+i\cdot 0=a$ olur. a bir gerçek sayı olduğundan $\mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}$ olduğu görülür ve $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}$ olur.

ÖRNEK

Aşağıda verilen karmaşık sayıların gerçek kısımlarını ve sanal kısımlarını bulunuz.

a) $z=3+2i$

b) $u=5i$

c) $r=2i-5$

ÇÖZÜM

a) $z=3+2i\Rightarrow Re(z)=3$ ve $Im(z)=2$

b) $w=-2+\sqrt{3}i\Rightarrow Re(w)=-2$ ve $Im(w)=\sqrt{3}$

c) $u=5i\Rightarrow u=0+5i\Rightarrow Re(u)=0$ ve $Im(u)=5$ bulunur.

ÖRNEK

Aşağıda verilen karmaşık sayıların gerçek kısımlarını ve sanal kısımlarını bulunuz.

a) $w = -2 + \sqrt{3}i$

b) $p = 7$

c) $s = \dfrac{3 + 2\sqrt{5}i}{7}$

ÇÖZÜM

a) $p = 7 \Rightarrow p = 7 + 0i \Rightarrow \mathrm{Re}(p) = 7$ ve $\mathrm{Im}(p) = 0$

b) $r = 2i - 5 \Rightarrow r = -5 + 2i \Rightarrow \mathrm{Re}(r) = -5$ ve $\mathrm{Im}(r) = 2$

c) $s = \dfrac{3 + 2\sqrt{5}i}{7} \Rightarrow s = \dfrac{3}{7} + \dfrac{2\sqrt{5}}{7}i \Rightarrow \mathrm{Re}(s) = \dfrac{3}{7}$ ve $\mathrm{Im}(s) = \dfrac{2\sqrt{5}}{7}$ bulunur.

ÖRNEK

$i = \sqrt{-1}$ olmak üzere $z = -7 + 3i$ ve $w = i - 6$ sayıları verilmektedir. Buna göre $\mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(w)$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$z = -7 + 3i \Rightarrow \mathrm{Re}(z) = -7$

$w = i - 6 = -6 + 1i \Rightarrow \mathrm{Im}(w) = 1$ olur.

$\mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(w) = (-7) - 1 = -8$ bulunur.

ÖRNEK

$x^2 + 4 = 0$ denkleminin karmaşık sayılar kümesinde çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$x^2 + 4 = 0$ ifadesinde $a = 1,\ b = 0,\ c = 4$ katsayıları $\triangle = b^2 - 4ac$ ifadesinde yerine yazılır ve $\triangle = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -16$ bulunur. $\triangle = -16 < 0$ olduğundan denklemin gerçek bir kökü yoktur. Fakat denklemin çözümü karmaşık sayılar kümesinde yapıldığında karmaşık iki kök bulunur.

$x^2 + 4 = 0$

$x^2 = -4 \quad (-1 = i^2)$

$x^2 = 4i^2$

$x_1 = 2i$ ve $x_2 = -2i$ olur.

Buna göre verilen denklemin çözüm kümesi $Ç = \{-2i, 2i\}$ bulunur.

$a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ ikinci dereceden bir bilinmeyenli denkleminde $\triangle < 0$ ise denklemin sanal kökleri vardır.

» Kökler $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\triangle}}{2a}$ ve $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\triangle}}{2a}$ olur.

ÖRNEK

$x^2 - 2x + 5 = 0$ denkleminin karmaşık sayılar kümesinde çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$x^2 - 2x + 5 = 0$ ifadesinde $a = 1,\ b = -2,\ c = 5$ katsayıları $\triangle = b^2 - 4ac$ ifadesinde yerine yazılırsa $\triangle = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16$ bulunur.
$\triangle = -16 < 0$ olduğundan denklemin karmaşık sayı kökleri vardır.

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\triangle}}{2a} = \frac{-(-2)-\sqrt{-16}}{2 \cdot 1} = \frac{2-\sqrt{16 \cdot (-1)}}{2} = \frac{2-\sqrt{16} \cdot \sqrt{-1}}{2}$$
$$= \frac{2-4 \cdot \sqrt{-1}}{2} = \frac{2-4i}{2} = 1-2i \text{ veya}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\triangle}}{2a} = \frac{-(-2)+\sqrt{-16}}{2 \cdot 1} = \frac{2+\sqrt{16 \cdot (-1)}}{2} = \frac{2+\sqrt{16} \cdot \sqrt{-1}}{2}$$
$$= \frac{2+4 \cdot \sqrt{-1}}{2} = \frac{2+4i}{2} = 1+2i \text{ olur.}$$

Buna göre verilen denklemin çözüm kümesi $Ç = \{1-2i, 1+2i\}$ bulunur.

Sanal Birimin (i) Kuvvetleri

$\sqrt{-1} = i$ sayısına sanal sayı birimi denir. i sanal sayı biriminin kuvvetleri,

$i^1 = i$
$i^2 = -1$
$i^3 = i^2 \cdot i = -i$
$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$
$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$
$i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$
$i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$
$i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1 \cdot 1 = 1$

$n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere
$i^0 = i^4 = i^8 = i^{4n} = 1$
$i^1 = i^5 = i^{4n+1} = i$
$i^2 = i^6 = i^{4n+2} = -1$
$i^3 = i^7 = i^{4n+3} = -i$ olur.

şeklinde olur.

ÖRNEK

$i = \sqrt{-1}$ olmak üzere aşağıdaki işlemlerin sonucunu bulunuz.

a) i^{34} **b)** i^{71} **c)** $\sqrt{-4} \cdot \sqrt{-9}$ **ç)** $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-16} \cdot \sqrt{-25}$

ÇÖZÜM

a) $i^{34} = i^{4 \cdot 8+2} = i^2 = -1$

b) $i^{71} = i^{4 \cdot 17+3} = i^3 = -i$

c) $\sqrt{-4} \cdot \sqrt{-9} = \sqrt{4 \cdot (-1)} \cdot \sqrt{9 \cdot (-1)} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{-1} = 2 \cdot i \cdot 3 \cdot i = 6 \cdot i^2 = 6 \cdot (-1) = -6$

ç) $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-16} \cdot \sqrt{-25} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{16} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{25} \cdot \sqrt{-1}$
$= i \cdot 4 \cdot i \cdot 5 \cdot i = 20 \cdot i^3 = 20 \cdot (-i) = -20i$ bulunur.

Karmaşık Sayının Eşleniği

Bir karmaşık sayının sanal kısmının işaretinin değiştirilmesi ile elde edilen karmaşık sayıya, bu karmaşık sayının eşleniği denir. z karmaşık sayısının eşleniği $\overline{z}$ ile gösterilir. $z = a + ib$ ise $\overline{z} = a - ib$ olur.

$a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin köklerinden biri $z_1 = a + ib$ ise diğeri bu kökün eşleniği olan $z_2 = a - ib$ köküdür.

ÖRNEK

Aşağıda verilen karmaşık sayıların eşleniklerini bulunuz.

a) $z = 1 + 2i$
b) $w = 3 - i$
c) $u = 2i$
ç) $p = -7$

ÇÖZÜM

a) $z = 1 + 2i \Rightarrow \overline{z} = 1 - 2i$
b) $w = 3 - i \Rightarrow \overline{w} = 3 + i$
c) $u = 2i \Rightarrow \overline{u} = -2i$
ç) $p = -7 \Rightarrow \overline{p} = -7$

ÖRNEK

$z = \sqrt{-9} - \sqrt{-16} - \sqrt{25}$ karmaşık sayısının eşleniğini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{-9} - \sqrt{-16} - \sqrt{25} \\ &= \sqrt{9 \cdot (-1)} - \sqrt{16 \cdot (-1)} - \sqrt{25} \\ &= \sqrt{9} \cdot \sqrt{(-1)} - \sqrt{16} \cdot \sqrt{(-1)} - \sqrt{25} \\ &= 3 \cdot i - 4 \cdot i - 5 \\ &= -5 - i \text{ olur.} \end{aligned}$$

Buna göre $z == -5 + i$ olur.

ALIŞTIRMALAR

1. $x^2 + 8x - 20 = 0$ $z = \sqrt{-16} - \sqrt[3]{-8}$ sayısını $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $z = a + bi$ şeklinde yazınız.

2. $\sqrt{-4} \cdot \sqrt{-9} \cdot \sqrt{-16}$ işleminin sonucunu bulunuz.

3. Aşağıdaki karmaşık sayıların eşleniklerini bulunuz.

   a) $z_1 = 2 + 3i$ **b)** $z_2 = -5i - 2$ **c)** $z_3 = 7$ **d)** $z_1 = 4i$

4. $z = -i - 1$ ve $w = -4i$ ise $\operatorname{Im}(\overline{z}) - \operatorname{Re}(\overline{w})$ değerini bulunuz.

5. $x^2 + 144 = 0$ denkleminin karmaşık sayılar kümesinde çözüm kümesini bulunuz.

6. $x^2 + 4x + 5 = 0$ denkleminin karmaşık sayılar kümesinde çözüm kümesini bulunuz.

7. $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere $z = 2\sqrt{9} + 3\sqrt{-25}$ ise $\operatorname{Im}(\overline{z}) - \operatorname{Re}(z)$ değerini bulunuz.

8. $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere $f(x) = x^4 + 2x^3$ ise $z = f(i)$ için $\operatorname{Re}(z) \cdot \operatorname{Im}(z)$ değerini bulunuz.

9. $i + i^2 + i^3 + \ldots + i^9$ ifadesinin değerini bulunuz.

10. $i \cdot i^3 \cdot i^5 \cdot i^7$ ifadesinin değerini bulunuz.

12.2.1.3. İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemlerin Kökleri İle Katsayıları Arasındaki Bağıntılar

$x^2 - 1 = 0$ $a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin diskriminantı $\triangle = b^2 - 4ac$ ve kökleri,

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\triangle}}{2a} \text{ ve } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\triangle}}{2a} \text{ olduğundan}$$

Kökler Toplamı:
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\triangle}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\triangle}}{2a} \\ &= \frac{-b + \cancel{\sqrt{\triangle}} + (-b - \cancel{\sqrt{\triangle}})}{2a} \\ &= \frac{-2b}{\cancel{2}a} \\ &= \frac{\mathbf{-b}}{\mathbf{a}} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Kökler Çarpımı:
$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= \left(\frac{-b - \sqrt{\triangle}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b + \sqrt{\triangle}}{2a}\right) \\ &= \frac{(-b + \sqrt{\triangle}) \cdot (-b - \sqrt{\triangle})}{2a \cdot 2a} \\ &= \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\triangle})^2}{4a^2} \\ &= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} \\ &= \frac{\cancel{4a}c}{\cancel{4a} \cdot a} \\ &= \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{a}} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK

$2x^2 + 3x - 6 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olduğuna göre aşağıdaki ifadelerin değerini bulunuz.

a) $x_1 + x_2$

b) $x_1 \cdot x_2$

ÇÖZÜM

$2x^2 + 3x - 6 = 0$ denkleminde $a = 2$, $b = 3$ ve $c = -6$ olur. Buradan

a) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{2}$

b) $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-6}{2} = -3$ bulunur.

ÖRNEK

$3x^2-2x+4=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olduğuna göre $x_1+x_2-x_1\cdot x_2$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$3x^2-2x+4=0$ denkleminde $a=3,\ b=-2$ ve $c=4$ olur.

Buradan $x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{-2}{3}=\frac{2}{3}$ ve $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}=\frac{4}{3}$ değerleri $x_1+x_2-x_1\cdot x_2$ ifadesinde yerine yazılırsa $x_1+x_2-x_1\cdot x_2=\frac{2}{3}-\frac{4}{3}=\frac{2-4}{3}=-\frac{2}{3}$ bulunur.

ÖRNEK

$x^2-2x+6=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olmak üzere $(x_1)^2\cdot x_2+x_1\cdot(x_2)^2$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$(x_1)^2\cdot x_2+x_1\cdot(x_2)^2$ ifadesi $x_1\cdot x_2$ parantezine alınırsa

$(x_1)^2\cdot x_2+x_1\cdot(x_2)^2=(x_1\cdot x_2)\cdot(x_1+x_2)$ olur.

$x^2-2x+6=0$ denkleminde $a=1,\ b=-2$ ve $c=6$ olduğundan

$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{-2}{1}=2$ ve $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}=\frac{6}{1}=6$ olur.

Buna göre verilen denklemin çözüm kümesi

$(x_1)^2\cdot x_2+x_1\cdot(x_2)^2=(x_1\cdot x_2)\cdot(x_1+x_2)=6\cdot 2=12$ bulunur.

ÖRNEK

$m\in\mathbb{R}$ olmak üzere $2x^2-7x+3m=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. $x_1\cdot x_2=6$ olduğuna göre m değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$2x^2-7x+3m=0$ denkleminde $a=2,\ b=-7$ ve $c=3m$ olduğundan

$x_1\cdot x_2=6\Rightarrow\frac{c}{a}=6\Rightarrow\frac{3m}{2}=6\Rightarrow 3m=12\Rightarrow m=4$ bulunur.

ÖRNEK

$m\in\mathbb{R}$ olmak üzere $2x^2+5x+m-3=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=-\frac{5}{4}$ olduğuna göre m değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=-\frac{5}{4}$ ifadesinde paydalar eşitlenirse

$\underset{(x_2)}{\frac{1}{x_1}}+\underset{(x_1)}{\frac{1}{x_2}}=-\frac{5}{4}\Rightarrow\frac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}=-\frac{5}{4}\Rightarrow\frac{-\frac{b}{\cancel{a}}}{\frac{c}{\cancel{a}}}=-\frac{5}{4}\Rightarrow\cancel{-}\frac{b}{c}=\cancel{-}\frac{5}{4}\Rightarrow\frac{b}{c}=\frac{5}{4}$ olur.

$2x^2+5x+m-3=0$ denkleminde $a=2,\ b=5$ ve $c=m-3$ olduğundan

$\frac{b}{c}=\frac{5}{4}\Rightarrow\frac{5}{m-3}=\frac{5}{4}\Rightarrow 5\cdot(m-3)=5\cdot 4\Rightarrow 5m-15=20\Rightarrow 5m=35\Rightarrow m=7$ bulunur.

ÖRNEK

$a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $2x^2-(3a-1)x+4a+6=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. $x_1+x_2=1$ olduğuna göre $x_1 \cdot x_2$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$2x^2-(3a-1)x+4a+6=0$ denkleminde

$x_1+x_2=\frac{3a-1}{2}=1 \Rightarrow 3a-1=2 \Rightarrow 3a=3 \Rightarrow a=1$ olur.

$x_1 \cdot x_2=\frac{4a+6}{2}=\frac{4 \cdot 1+6}{2}=\frac{10}{2}=5$ bulunur.

Kökleri Verilen İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemin Elde Edilmesi

$a \neq 0$ ve $a,b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $ax^2+bx+c=0$ denkleminde eşitliğin her iki tarafı a ile bölünürse $\frac{\cancel{a}x^2}{\cancel{a}}+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}=\frac{0}{a} \Rightarrow x^2+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}=0$ olur.

$\frac{b}{a}=-(x_1+x_2)$ ve $\frac{c}{a}=x_1 \cdot x_2$ değerleri bu denklemde yerine yazılırsa

$x^2+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}=0 \Rightarrow x^2-(x_1+x_2) \cdot x+x_1 \cdot x_2=0$ bulunur.

Buradan kökleri x_1 ve x_2 olan ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem

$x^2-(x_1+x_2) \cdot x+x_1 \cdot x_2=0$ biçiminde oluşturulur.

Bir başka ifadeyle kökleri x_1 ve x_2 olan ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem yazılırken sırasıyla

» $T=x_1+x_2$ değeri bulunur.

» $Ç=x_1 \cdot x_2$ değeri bulunur.

Bulunan T ve Ç değerleri $x^2-Tx+Ç=0$ denkleminde yerine yazılır.
Böylece ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem oluşturulmuş olur.

ÖRNEK

Kökleri $x_1=3$ ve $x_2=-4$ olan ikinci dereceden denklemi bulunuz.

ÇÖZÜM

Kökler toplamı T, kökler çarpımı Ç olmak üzere
$T=x_1+x_2=3+(-4)=-1$ ve $Ç=x_1 \cdot x_2=3 \cdot (-4)=-12$ olur.

Bulunan T ve Ç değeri $x^2-Tx+Ç=0$ denkleminde yerine yazılırsa

$x^2-(-1)x+(-12)=0 \Rightarrow x^2+x-12=0$ ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi bulunur.

$a \neq 0$ ve $a,b,c \in \mathbb{Q}$ olmak üzere $ax^2+bx+c=0$ denkleminin $m,n \in \mathbb{R}$ için bir kökü $m+\sqrt{n}$ ise diğer kökü $m-\sqrt{n}$ dir.

ÖRNEK

Köklerinden biri $1-\sqrt{3}$ olan rasyonel katsayılı ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi yazınız.

ÇÖZÜM

İkinci dereceden rasyonel katsayılı bir denklemin köklerinden biri $x_1 = 1-\sqrt{3}$ ise diğer kökü $x_2 = 1+\sqrt{3}$ olur. Buradan

$T = x_1 + x_2 = (1-\sqrt{3}) + (1+\sqrt{3}) = 1 - \cancel{\sqrt{3}} + 1 + \cancel{\sqrt{3}} = 2$ ve

$Ç = x_1 \cdot x_2 = (1-\sqrt{3}) \cdot (1+\sqrt{3}) = 1 + \cancel{\sqrt{3}} - \cancel{\sqrt{3}} - 3 = -2$

değerleri $x^2 - Tx + Ç = 0$ denkleminde yerine yazılırsa

$x^2 - Tx + Ç = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + (-2) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = 0$ bulunur.

ÖRNEK

Köklerinden biri $\sqrt{5}-2$ olan rasyonel katsayılı ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi yazınız.

ÇÖZÜM

İkinci dereceden rasyonel katsayılı bir denklemin köklerinden biri $x_1 = \sqrt{5}-2$ ise diğer kökü $x_2 = -\sqrt{5}-2$ dir. Buradan

$T = x_1 + x_2 = (\sqrt{5}-2) + (-\sqrt{5}-2) = \cancel{\sqrt{5}} - 2 - \cancel{\sqrt{5}} - 2 = -4$ ve

$Ç = x_1 \cdot x_2 = (\sqrt{5}-2) \cdot (-\sqrt{5}-2) = -5 - \cancel{2 \cdot \sqrt{5}} + \cancel{2 \cdot \sqrt{5}} + 4 = -1$

değerleri $x^2 - Tx + Ç = 0$ denkleminde yerine yazılırsa

$x^2 - Tx + Ç = 0 \Rightarrow x^2 - (-4)x + (-1) = 0 \Rightarrow x^2 + 4x - 1 = 0$ bulunur.

ÖRNEK

$x^2 - 5x + 1 = 0$ denkleminin köklerinin birer fazlasını kök kabul eden ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi bulunuz.

ÇÖZÜM

$x^2 - 5x + 1 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olsun. Bu durumda istenen denklemin kökleri ise $x_1 + 1$ ve $x_2 + 1$ olur.
Buradan bu denklemin kökler toplamı

$T = x_1 + 1 + x_2 + 1 = x_1 + x_2 + 2$ ve kökler çarpımı

$Ç = (x_1 + 1) \cdot (x_2 + 1) = x_1 \cdot x_2 + x_1 + x_2 + 1$ olur.

$x^2 - 5x + 1 = 0$ denkleminde $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-5}{1} = 5$ ve $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{1} = 1$ değerleri yerine yazılırsa

$T = x_1 + x_2 + 2 = 5 + 2 = 7$ ve

$Ç = x_1 \cdot x_2 + x_1 + x_2 + 1 = 1 + 5 + 1 = 7$ elde edilir.

Buradan T ve Ç değerleri $x^2 - Tx + Ç = 0$ denkleminde yerine yazılırsa $x^2 - 7x + 7 = 0$ bulunur.

ÖRNEK

$x^2-7x+5=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. Kökleri $2x_1-1$ ve $2x_2-1$ olan ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi yazınız.

ÇÖZÜM

$x^2-7x+5=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olmak üzere istenen denklemde

kökler toplamı $T=2x_1-1+2x_2-1=2\cdot(x_1+x_2)-2$

kökler çarpımı $Ç=(2x_1-1)\cdot(2x_2-1)=4x_1\cdot x_2-2\cdot(x_1+x_2)+1$ olur.

$x^2-7x+5=0$ denkleminde $x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{-7}{1}=7$ ve $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}=\frac{5}{1}=5$ olur.

Bu durumda

$T=2\cdot(x_1+x_2)-2=2\cdot7-2=12$ ve

$Ç=4x_1\cdot x_2-2\cdot(x_1+x_2)+1=4\cdot5-2\cdot7+1=7$ elde edilir.

Buradan T ve Ç değerleri $x^2-Tx+Ç=0$ denkleminde yerine yazılırsa $x^2-12x+7=0$ bulunur.

ÖRNEK

Kökler toplamı T, kökler çarpımı Ç ile gösterilen ve kökleri arasında $2T-3Ç=24$ ve $T+Ç=-3$ eşitlikleri olan ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi bulunuz.

ÇÖZÜM

Kökler toplamı ile kökler çarpımı içeren iki denklem ortak çözülür.

$$\left.\begin{aligned} 2T-3Ç&=24 \\ 3/\quad T+Ç&=-3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} 2T-3Ç&=24 \\ +\;3T+3Ç&=-9 \\ \hline 5T=15 \Rightarrow T&=3 \text{ olur.} \end{aligned}$$

$T=3$ değeri $T+Ç=-3$ denkleminde yerine yazılırsa $3+Ç=-3 \Rightarrow Ç=-6$ olur.

Bulunan T ve Ç değerleri $x^2-Tx+Ç=0$ denkleminde yerine yazılırsa $x^2-3x-6=0$ bulunur.

ÖRNEK

Toplamları -2 ve çarpımları -3 olan iki sayıyı bulunuz.

ÇÖZÜM

$T=-2$ ve $Ç=-3$ değerleri $x^2-Tx+Ç=0$ denkleminde yerine yazılırsa $x^2+2x-3=0$ olur.

Buradan $x^2+2x+\underset{\substack{-1\\3}}{-3}=0 \Rightarrow (x-1)\cdot(x+3)=0 \Rightarrow x=1$ ve $x=-3$ bulunur.

ALIŞTIRMALAR

1. $x^2 - mx + m + 2 = 0$ denkleminin kökler toplamı 6 dır. Buna göre denklemin çözüm kümesini bulunuz.

2. $m \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x^2 - 3x - m - 1 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olmak üzere $2x_1 + x_2 = 4$ olduğuna göre m değerini bulunuz.

3. a ve b sıfırdan farklı birer gerçek sayı olmak üzere $2x^2 + (3a + b)x - b = 0$ denkleminin kökleri a ve b dir. Buna göre $a + b$ toplamını bulunuz.

4. $a \neq 0$ olmak üzere $ax^2 - 2x + 4a = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. $x_1 + x_2 = 3 \cdot x_1 \cdot x_2$ olduğuna göre a gerçek sayısının değerini bulunuz.

5. $3x^2 + 6x + a = 0$ ve $2x^2 + bx - 6 = 0$ denklemlerinin çözüm kümeleri eşit olduğuna göre $a + b$ toplamını bulunuz.

6. Kökleri -2 ve -3 olan ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi bulunuz.

7. Köklerinden biri $2 - \sqrt{3}$ olan ikinci dereceden bir bilinmeyenli rasyonel katsayılı denklemi bulunuz.

8. $4x^2 - 12x + 49 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. Buna göre $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ toplamının değerini bulunuz.

9. $3x^2 - 12x + 6 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. Buna göre $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ toplamının değerini bulunuz.

10. $x^2 - 2x - 11 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olduğuna göre kökleri $2x_1 - 3$ ve $2x_2 - 3$ olan ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi bulunuz.

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

A) ***1- 3. cümlelerde boş bırakılan yerlere uygun sözcükleri yazınız.***

1. İkinci dereceden bir bilinmeyenli $ax^2+bx+c=0$ denkleminde $\triangle<0$ ise denklemin .... kökü yoktur. Fakat .... sayı olan iki kökü vardır.

2. $px^2-qx-r=0$ şeklinde verilen ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemin kökler toplamı .... ve kökler çarpımı .... olur.

3. Rasyonel katsayılı ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemin kökleri birbirinin .... dir.

B) ***4. soruda verilen ifadelerden doğru olanların başına D, yanlış olanların başına Y yazınız.***

4. $a\neq 0$ olmak üzere $ax^2+bx+c=0$ ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi veriliyor.

( ) Denklemin köklerinin gerçek sayı olup olmadığını anlamak için $\triangle=b^2-4ac$ ifadesinin alacağı değere bakılır.

( ) $\triangle>0$ için ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemin daima farklı iki gerçek kökü vardır.

( ) Denklemin bir kökü $\sqrt{5}-3$ ise diğer kökü $\sqrt{5}+3$ olur.

( ) $\triangle<0$ için ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemin karmaşık sayı olan farklı iki kökü vardır.

( ) Bu denklemin kökleri toplamı ile kökleri çarpımı verilirse a,b ve c değerleri bulunabilir.

C) ***5. soruda numaralı ifadeler ile harfli ifadeleri eşleştirerek doğru cevapları ilgili kutucuklara yazınız.***

5.

I.	$x^2+81=0$	**a.**	$\{-9,9\}$
II.	$x^2-5x-36=0$	**b.**	$\{-2\}$
III.	$9x^2-27=0$	**c.**	$\{3-i,3+i\}$
IV.	$\frac{x^2}{5}+\frac{4x+4}{5}=0$	**d.**	$\{-\sqrt{3},\sqrt{3}\}$
V.	$x^2-6x+10=0$	**e.**	$\{-9i,9i\}$
		f.	$\{-4,9\}$

I.	II.	III.	IV.	V.

Ç) 6-10. açık uçlu soruları cevaplandırınız.

6. $x^2-2x-4=0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

7. $m \in \mathbb{R}$ olmak üzere $2x^2-mx+m-2=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.
$x_1 \cdot (1-x_2) = x_2 \cdot (1-x_1)$ olduğuna göre m değerini bulunuz.

8. Denkleminin bir kökü $3-\sqrt{2}$ olan ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi bulunuz.

9. $x^2-3x-1=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. Buna göre kökleri x_1-3 ve x_2-3 olan ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi bulunuz.

10. $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x^2-(a+b)x+b=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.
$x_1+x_2=6$ ve $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=-2$ olduğuna göre $a-b$ farkının değerini bulunuz.

D) *11-43. çoktan seçmeli soruların doğru seçeneklerini işaretleyiniz.*

11. $(m+5)x^2-7x+3=0$

denklemi ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem olduğuna göre m hangi değeri alamaz?

A) -5 B) -3 C) 5 D) 3 E) 7

12. $x(x-5)=-4(x-5)$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{4\}$ B) $\{5\}$ C) $\{-4\}$ D) $\{-4,5\}$ E) $\{-5,4\}$

13. $x^2-2x-5=0$

denkleminin köklerinden biri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $1-\sqrt{5}$ B) $1+\sqrt{5}$ C) $-1-\sqrt{6}$ D) $1+\sqrt{6}$ E) $12\sqrt{6}$

14. $4x^2-9=0$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\left\{\frac{9}{4}\right\}$ B) $\left\{\frac{3}{2}\right\}$ C) $\left\{-\frac{3}{2}\right\}$ D) $\left\{-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\}$ E) $\left\{-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right\}$

15. $x^2-4x=0$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{4\}$ B) $\{2\}$ C) $\{0,4\}$ D) $\{0,2\}$ E) $\{0\}$

16. $2x^2-4x+7=0$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{1+\sqrt{3}\}$

B) $\{\ \}$

C) $\{1\}$

D) $\{1+\sqrt{3},1-\sqrt{3}\}$

E) $\{\sqrt{3}\}$

17. $m \neq 3$ ve $m \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$(m-3)x^2 - 3x + 5 = 0$$

denkleminin gerçek kökü olmadığına göre m nin alabileceği <u>en küçük</u> tam sayı değeri kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

18. $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$x^2 - 8x + 3k + 1 = 0$$

denkleminin eşit iki kökü olduğuna göre k değeri kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

19. $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$2x^2 - x + k - 2 = 0$$

denkleminin köklerinden biri $\frac{3}{2}$ olduğuna göre k değeri kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

20. $a \neq 0$ ve $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$x^2 + (2 - 3a)x - 6a = 0$$

denkleminin köklerinden biri $x_1 = a$ olduğuna göre a nın değeri kaçtır?

A) -4 B) -3 C) -2 D) 2 E) 3

21. $$x^2 + 1 = 0$$

denkleminin gerçek sayılardaki çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{1\}$ B) $\{-1\}$ C) $\{\ \}$ D) $\{-1, 1\}$ E) $\{0\}$

22. $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere,

$$\sqrt{-16} - \sqrt{-9}$$

farkı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-i$ B) i C) 1 D) -1 E) 7

23. $i^{21} + i^{22} + i^{23} + i^{24}$

toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) i B) $-i$ C) 0 D) 1 E) -1

24. **Aşağıdakilerden hangisi $x^2 + 24 = 0$ denkleminin bir köküdür?**

A) $\sqrt{6}$ B) $2\sqrt{6}$ C) $\sqrt{3}i$

D) $2\sqrt{6}i$ E) $12i$

25. $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere

$$z = 3 \cdot \sqrt{-27} - \sqrt{75}$$

olduğuna göre $\mathbf{Re(z) \cdot Im(\overline{z})}$ işleminin sonucu kaçtır?

A) -135 B) -45 C) 45

D) 135 E) 180

26. $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere

$$z = \sqrt{16} + 3 \cdot i^2 \cdot i^3$$

olduğuna göre $\mathbf{Re(\overline{z}) \cdot Im(\overline{z})}$ işleminin sonucu kaçtır?

A) -12 B) -7 C) 7

D) 8 E) 12

27. $m \in \mathbb{R}$ ve $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere

$$z = (-6 - m) + (-4 - 4m)i \text{ ve}$$

$$w = (2m + 6) + 4mi$$

sayıları verilmektedir. $Re(z) + Im(w) = 0$ **olduğuna göre $\mathbf{Re(w) + Im(z)}$ toplamının değeri kaçtır?**

A) -8 B) -6 C) -4

D) -2 E) -1

28. $m \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$3x^2 + mx - 9 = 0$$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olduğuna göre **$\mathbf{x_1(x_2 + 1) = -2}$ olması için m değeri kaç olmalıdır?**

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

29. $x^2 + 3x - 2 = 0$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olduğuna göre $(3x_1 - 1) \cdot (3x_2 - 1)$ **işleminin sonucu kaçtır?**

A) -8 B) -7 C) -6 D) -5 E) -4

30. $x^2 + 2x + 5 = 0$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olduğuna göre $\frac{1}{x_1 - 1} + \frac{1}{x_2 - 1}$ **ifadesinin değeri kaçtır?**

A) $-\frac{1}{4}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{2}$ E) 1

31. $m \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$2x^2 + mx - m + 2 = 0$

denkleminin kökler çarpımı 4 olduğuna göre kökler toplamı kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

32. $2x^2 + 5x - 8 = 0$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olduğuna göre $x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2$ **ifadesinin değeri kaçtır?**

A) -10 B) -6 C) -4 D) 6 E) 10

33. $x^2 + 2x - 10 = 0$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olduğuna göre $x_1^2 + x_2^2$ **toplamının değeri kaçtır?**

A) 20 B) 21 C) 22 D) 23 E) 24

34. Kökleri 3 ve -7 olan ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x^2 - 21x + 4 = 0$

B) $x^2 + 4x - 21 = 0$

C) $x^2 - 4x + 21 = 0$

D) $x^2 + 4x + 21 = 0$

E) $x^2 - 4x - 21 = 0$

35. **Kökleri $\sqrt{3}+5$ ve $\sqrt{3}-5$ olan ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $x^2-2\sqrt{3}x-22=0$

B) $x^2+2\sqrt{3}x-21=0$

C) $x^2-3\sqrt{2}x+22=0$

D) $x^2+4x+21=0$

E) $x^2-4x-22=0$

36. $x^2-5x-3=0$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

Kökleri $4x_1$ ve $4x_2$ olan ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x^2-20x-48=0$

B) $x^2+20x-48=0$

C) $x^2-20x+48=0$

D) $x^2+10x-48=0$

E) $x^2-10x+48=0$

37. $x^2+2x+7=0$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

Kökleri $2x_1+1$ ve $2x_2+1$ olan ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x^2-2x+33=0$

B) $x^2-2x+25=0$

C) $x^2-4x+5=0$

D) $x^2+2x-33=0$

E) $x^2+2x+25=0$

38. **Köklerinden biri $-\sqrt{3}+1$ olan rasyonel katsayılı ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemin diğer kökü kaçtır?**

A) $1-\sqrt{3}$ B) $\sqrt{3}+1$ C) $\sqrt{3}-1$

D) $-\sqrt{3}-1$ E) $\sqrt{3}$

39. **Köklerinden biri $1-\sqrt{2}$ olan rasyonel katsayılı ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $2x^2-x+3=0$

B) $x^2-x-2=0$

C) $x^2-2x-1=0$

D) $x^2-3x+1=0$

E) $x^2+2x+3=0$

40. **Köklerinden biri $3+\sqrt{5}$ olan rasyonel katsayılı ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemin kökler çarpımı kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

12.3. ÇEMBER VE DAİRE

KAZANIMLAR

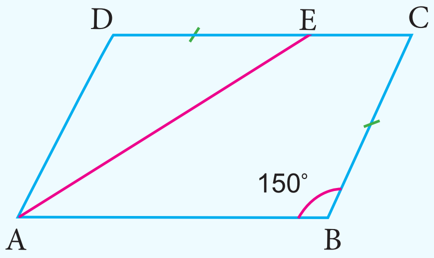
12.3.1. Çemberin Temel Elemanları

12.3.2. Çemberde Açılar

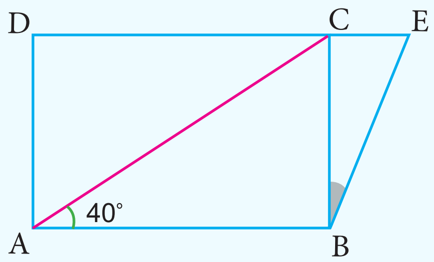
12.3.3. Dairenin Çevresi ve Alanı

Bu ünitede çember, merkez, yarıçap, çap, kiriş, teğet, yay, merkez açı, çevre açı, yay uzunluğu, daire, dare dilimi kavramlarını öğreneceksiniz.

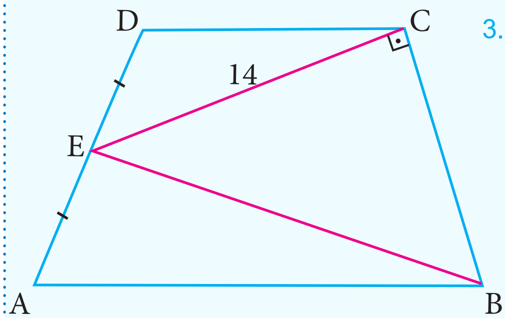
HAZIRLIK ÇALIŞMASI



1. Yanda verilen ABCD paralelkenarında $|BC| = |DE|$ ve $m(\widehat{ABC}) = 150°$ olduğuna göre $\mathbf{m(\widehat{AEC})}$ kaç derecedir?



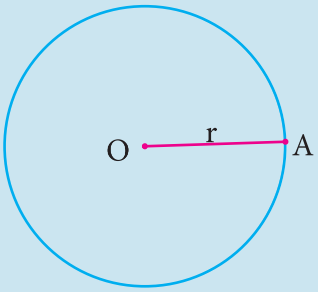
2. Yukarıda verilen ABCD dikdörtgeninde $|AC| = |DE|$, $m(\widehat{BAC}) = 40°$ ve D, C, E noktaları doğrusal olduğuna göre $\mathbf{m(\widehat{CBE})}$ kaç derecedir?



3. ABCD yamuğunda
$[AB] \parallel [DC]$
$|AE| = |ED|$
$|EC| = 14$ cm
$A(ABCD) = 168$ cm^2
olduğuna göre $|\mathbf{BC}|$ kaç cm dir?

12.3.1. ÇEMBERİN TEMEL ELEMANLARI

12.3.1.1. Çemberde Teğet, Kiriş, Çap, Yay ve Kesen

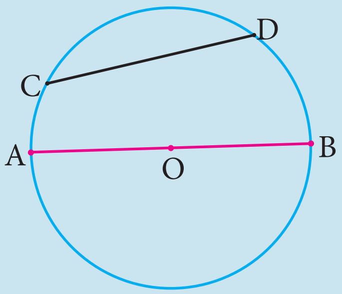


Düzlemdeki sabit bir noktadan eşit uzaklıkta bulunan noktaların kümesine çember denir.

Sabit noktaya çemberin merkezi denir ve O ile gösterilir.

Çemberin üzerindeki herhangi bir nokta ile çemberin merkezi arasındaki uzaklığa çemberin yarıçapı denir ve r ile gösterilir.

Merkez ve yarıçap çemberin temel elemanlarıdır.

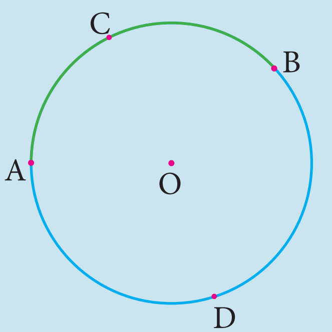


Çemberin farklı iki noktasını birleştiren doğru parçasına çemberin bir kirişi denir.

Çemberin merkezinden geçen kirişe çemberin bir çapı denir.

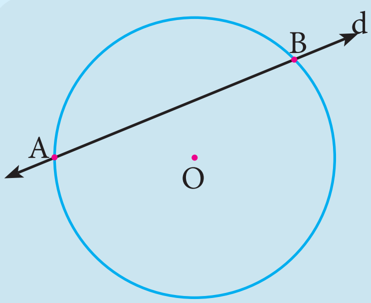
Yandaki şekilde $[AB]$ ve $[CD]$ çemberin birer kirişidir.

$[AB]$ çemberin merkezinden geçtiğinden çemberin bir çapıdır. Çap aynı zamanda çemberin en uzun kirişi olup çemberi iki eş parçaya ayırır.



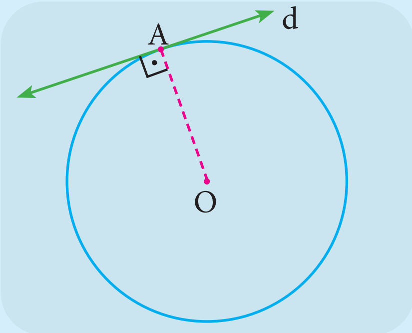
Çemberin farklı iki noktası arasında kalan parçasına çemberin bir yayı denir.
Çemberin yayı, iki uç noktası ile bu noktalar arasındaki üçüncü bir nokta ile belirlenir.

Yandaki şekilde A ve B noktaları arasında oluşan yeşil renkli çember yayı $\overset{\frown}{ACB}$ ve mavi renkli çember yayı $\overset{\frown}{ADB}$ biçiminde gösterilir. Bununla birlikte, küçük olan yeşil renkli çember yayı için $\overset{\frown}{AB}$ gösterimi kullanılabilir.



Çemberin farklı iki noktasından geçen doğruya çemberin bir keseni denir.

Yandaki şekilde çemberi A ve B noktalarında kesen d doğrusu çemberin bir kesenidir.



Çember ile yalnız bir ortak noktası bulunan doğruya çemberin bir teğeti denir.

Yandaki şekilde çember ile d doğrusunun ortak noktası olan A noktası, teğetin değme noktasıdır.

Çemberin merkezi ile teğetin değme noktasını birleştiren doğru, teğete diktir.

ÖRNEK

I. Çemberin merkezinden geçen her kiriş, aynı zamanda bir çaptır.
II. Çemberin herhangi bir kirişi ile ortak iki noktası vardır.
III. Çembere ait bir kirişin taşıyıcı doğrusu çemberin bir kesenidir.
IV. Çemberin en uzun kirişi çemberin bir çapıdır.
V. Bir teğetin çember ile değme noktası dışında ortak noktası yoktur.

Yukarıda verilen ifadelerden hangilerinin doğru olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Çemberin merkezinden geçen kirişe çemberin bir çapı denir. Buna göre merkezden geçen her kiriş aynı zamanda çaptır. Bu durumda I. doğrudur.

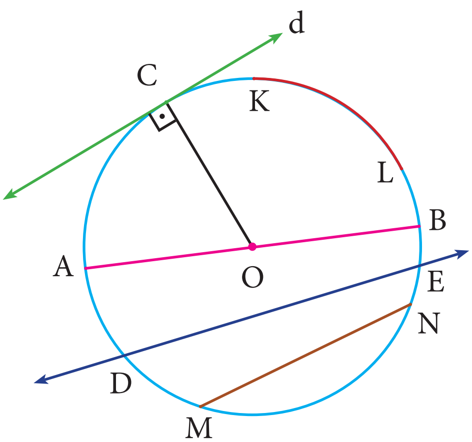
Çemberin farklı iki noktasını birleştiren doğru parçasına çemberin bir kirişi denir. Buna göre kiriş ile çemberin ortak iki noktası vardır. Bu durumda II. doğrudur.

Çemberin farklı iki noktasından geçen doğruya çemberin bir keseni denir. Buna göre çemberin bir kirişini taşıyan doğru çemberin bir keseni olur. Bu durumda III. doğrudur.

Çap aynı zamanda çemberin en uzun kirişidir. Buna göre çemberin en uzun kirişi çaptır. Bu durumda IV. doğrudur.

Çember ile yalnız bir ortak noktası bulunan doğruya çemberin bir teğeti denir. Buna göre bir teğetin çember ile değme noktası dışında ortak noktası yoktur. Bu durumda V. doğrudur.

ÖRNEK



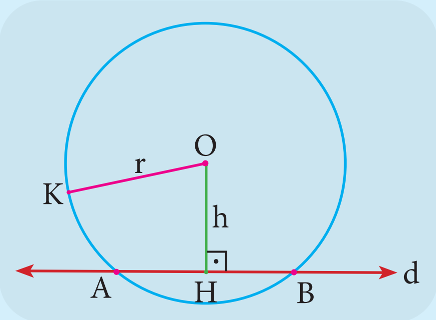
Yanda verilen çemberin temel ve yardımcı elemanlarına birer örnek veriniz.

ÇÖZÜM

O merkezdir.
$[OC]$ yarıçaptır.
$[AB]$ çaptır.
$[MN]$ kiriştir.
d doğrusu teğettir.
DE kesendir.
$\overset{\frown}{KL}$ yaydır.

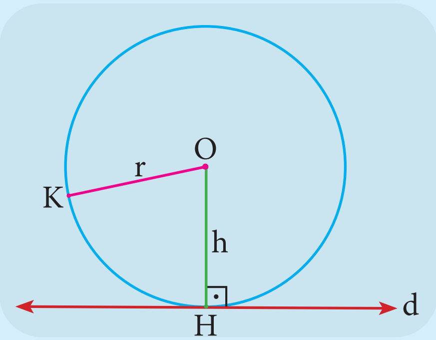
Bir Çember İle Bir Doğrunun Birbirine Göre Durumları

Düzlemde bir çember ile doğrunun birbirlerine göre üç durumu vardır. O merkezli çemberin yarıçap uzunluğu r ve merkezinin d doğrusuna olan uzaklığı $|OH| = h$ olsun.



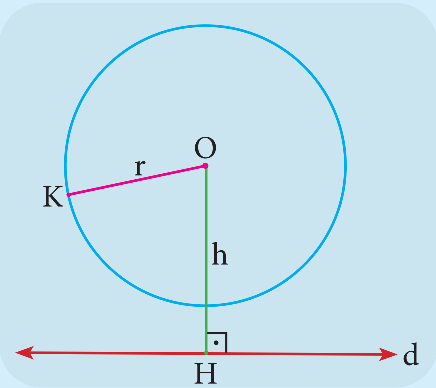
I. Durum

$h < r$ ise doğru çemberi iki farklı noktada keser.
Bu durumda d doğrusu çemberin bir kesenidir.



II. Durum

$h = r$ ise doğru ile çemberin yalnız bir ortak noktası vardır.
Bu durumda d doğrusu çemberin bir teğetidir.



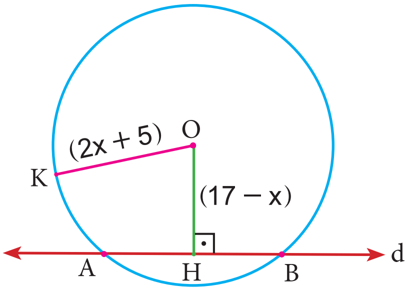
III. Durum

$h > r$ ise doğru ile çemberin ortak noktası yoktur.
Bu durumda d doğrusu çemberi kesmez.

ÖRNEK

Yarıçapı $r = (2x + 5)$ cm olan bir çemberin merkezinin bir d doğrusuna olan uzaklığı $(17 - x)$ cm dir. Doğru çemberin bir keseni olduğuna göre x in alabileceği en küçük tam sayı değerini bulunuz.

ÇÖZÜM



Doğru, çemberin bir keseni olduğundan çemberi iki farklı noktada keser. Bu durumda çemberin merkezinin doğruya olan uzaklığı çemberin yarıçapından küçük olacağından

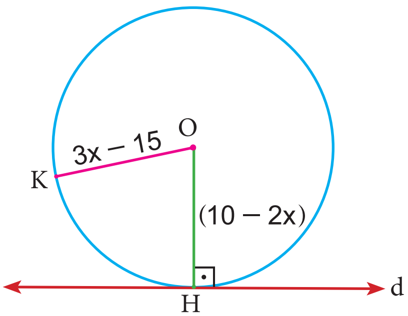
$$17 - x < 2x + 5 \Rightarrow 17 - 5 < 2x + x$$
$$\Rightarrow 12 < 3x$$
$$\Rightarrow 4 < x \text{ olur.}$$

Buna göre x in alabileceği en küçük tam sayı değeri 5 olarak bulunur.

ÖRNEK

Yarıçapı $r = (3x - 15)$ cm olan bir çemberin bir d doğrusuna olan uzaklığı $(17 - x)$ cm dir. Doğru ile çemberin yalnız bir ortak noktası olduğuna göre x değerini bulunuz.

ÇÖZÜM



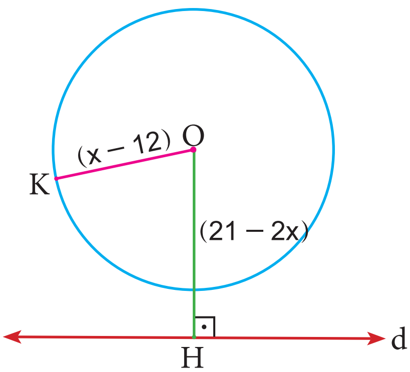
Doğru ile çemberin yalnız bir ortak noktası olduğundan doğru çembere teğettir. Bu durumda çemberin merkezinin doğruya olan uzaklığı çemberin yarıçapına eşit olacağından

$$3x - 15 = 17 - x \Rightarrow 3x + x = 17 + 15$$
$$\Rightarrow 4x = 32$$
$$\Rightarrow x = 8 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

Yarıçapı $r = (x - 12)$ cm olan bir çemberin merkezinin bir d doğrusuna olan uzaklığı $(21 - 2x)$ cm dir. Doğru ile çemberin ortak noktası olmadığına göre x in alabileceği en büyük tam sayı değerini bulunuz.

ÇÖZÜM



Doğru ile çemberin ortak noktası olmadığından çemberin merkezinin doğruya olan uzaklığı, çemberin yarıçapından büyüktür. Bu durumda

$$x - 12 < 21 - 2x \Rightarrow x + 2x < 21 + 12$$
$$\Rightarrow 3x < 33$$
$$\Rightarrow x < 11 \text{ olur.}$$

Buna göre x in alabileceği en büyük tam sayı değeri 10 olarak bulunur.

ÖRNEK

Yarıçapı $(x+3)$ cm olan bir çemberin merkezinin d, k ve m doğrularına olan uzaklıkları sırasıyla $(3x-5)$, $(y-1)$ ve $(6x-2)$ cm dir. Doğrular ile çemberler arasındaki durumlar aşağıdaki gibidir:

I. d doğrusu çemberi iki farklı noktada kesmektedir.

II. k doğrusu çembere teğettir.

III. m doğrusu ile çemberin ortak noktası yoktur.

Buna göre y nin alabileceği tam sayı değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM

I. d doğrusu çemberi iki farklı noktada kestiğinden $3x-5 < x+3 \Rightarrow x < 4$ olur.

II. m doğrusu ile çemberin ortak noktası olmadığından $x+3 < 6x-2 \Rightarrow 1 < x$ olur.

Bu durumda x in alabileceği tam sayı değerleri 2 ve 3 olur.

III. k doğrusu çembere teğet olduğundan $x+3 = y-1 \Rightarrow y = x+4$ olur.

Bu durumda y nin alabileceği tam sayı değerleri $x = 2$ için $y = 6$ ve $x = 3$ için $y = 7$ bulunur.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki cümlelerde boş bırakılan yerleri uygun sözcüklerle tamamlayınız.

I. Çember ile bir ortak noktası olan doğruya çemberin bir .... denir.

II. Çemberi iki farklı noktada kesen doğruya çemberin bir .... denir.

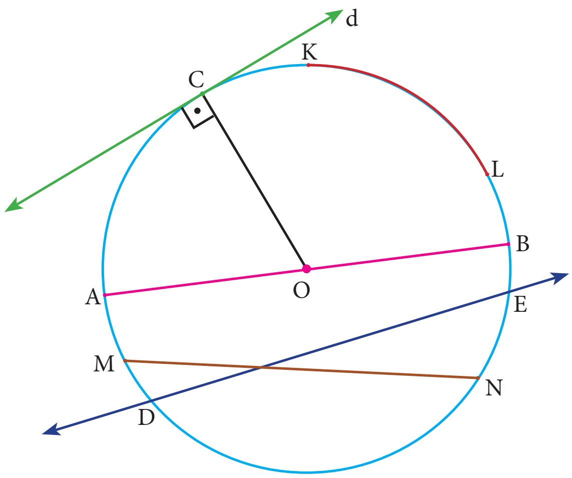
III. Kesenin çember içinde kalan parçasına çemberin bir .... denir.

IV. Çemberde en uzun kiriş çemberin .... geçer.

V. Merkezden geçen kirişe .... denir.

VI. Çemberin üzerindeki iki nokta arasında kalan parçasına .... denir.

2. Aşağıda yarıçapı 4 cm olan O merkezli çember verilmiştir.



Buna göre aşağıdaki ifadelerden hangileri doğrudur.

I. $[AB]$ çemberin bir kirişidir.

II. $|MN| < 8$

III. $[DE]$ çemberin bir kesenidir.

IV. d doğrusu çemberin bir teğetidir.

V. Çemberin keseni olan doğrunun oluşturduğu küçük yay $\overset{\frown}{DNE}$ dır.

VI. $\overset{\frown}{KL}$ kırmızı renkle gösterilmiştir.

3. Yarıçapı $r = (3x - 2)$ cm olan bir çemberin bir d doğrusuna olan uzaklığı $(18 - x)$ cm dir. Doğru ile çemberin bir keseni olduğuna göre x in alabileceği en küçük tam sayı değerini bulunuz.

4. Yarıçapı $r = (2x + 7)$ cm olan bir çemberin bir d doğrusuna olan uzaklığı $(19 - 2x)$ cm dir. Doğru ile çemberin yalnız bir ortak noktası olduğuna göre çemberin yarıçapını bulunuz.

5. Yarıçapı $r = (2x + 3)$ cm olan bir çemberin merkezinin bir d doğrusuna olan uzaklığı $(15 - x)$ cm dir. Doğru ile çemberin ortak noktası olmadığına göre x in alabileceği en büyük tam sayı değerini bulunuz.

6. Yarıçapı $(2x - 1)$ cm olan bir çemberin merkezinin d, k ve m doğrularına olan uzaklıkları sırasıyla $(x + 4)$, $(2y + 1)$ ve $(x + 6)$ cm dir. Doğrular ile çemberler arasındaki durumlar aşağıdaki gibidir:

I. d doğrusu çemberi iki farklı noktada kesmektedir.

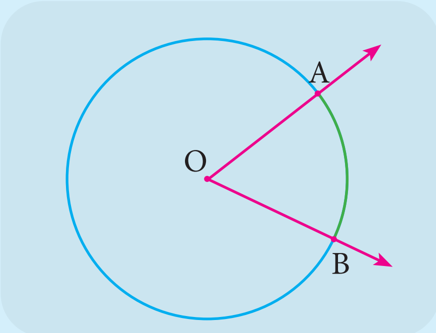
II. k doğrusu çembere teğettir.

III. m doğrusu ile çemberin ortak noktası yoktur.

x bir tam sayı olduğuna göre y değerini bulunuz.

12.3.2. ÇEMBERDE AÇILAR

12.3.2.1. Çemberde Açı Çeşitleri ve Özellikleri



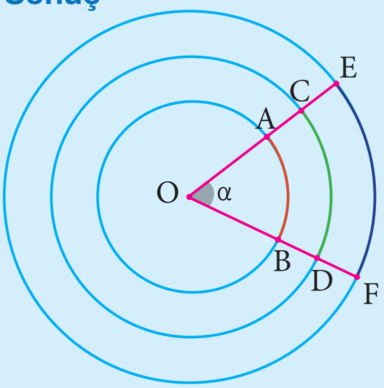
Köşesi çemberin merkezinde olan açıya çemberin bir merkez açısı denir.

Yandaki O merkezli çemberde AOB açısının köşesi çemberin merkezinde olduğundan çemberin bir merkez açısıdır ve bu açı çemberin AB yayını görür. AB yayının ölçüsü $m(\overset{\frown}{AB})$ ile gösterilir.

Bir çemberde merkez açının ölçüsü, gördüğü yayın ölçüsüne eşittir.

Bu durumda $m(\overset{\frown}{AB}) = m(\widehat{AOB})$ olur.

Sonuç

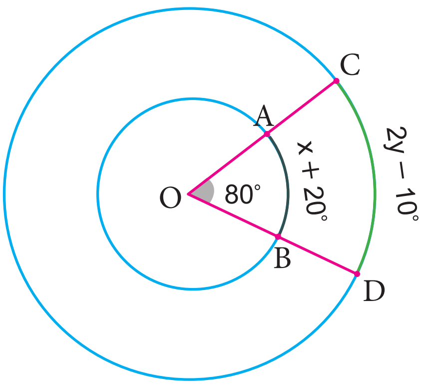


Yandaki şekilde EOF açısı O merkezli üç çemberin de merkez açısı olduğundan

$m(\overset{\frown}{AB}) = m(\overset{\frown}{CD}) = m(\overset{\frown}{EF}) = \alpha$

olur.

ÖRNEK



Yandaki şekilde O merkezli iki çember verilmiştir.

$m(\widehat{COD}) = 80^\circ$

$m(\overset{\frown}{AB}) = x + 20^\circ$

$m(\overset{\frown}{CD}) = 2y - 10^\circ$

olduğuna göre $x + y$ toplamını bulunuz.

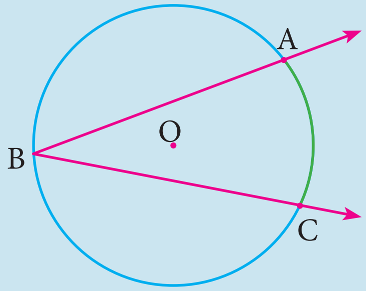
ÇÖZÜM

COD açısı O merkezli iki çemberin de merkez açısı olduğundan $m(\overset{\frown}{AB}) = m(\overset{\frown}{CD}) = 80^\circ$ olur.

$m(\overset{\frown}{AB}) = 80^\circ \Rightarrow x + 20^\circ = 80^\circ$ $\quad$ $m(\overset{\frown}{CD}) = 80^\circ \Rightarrow 2y - 10^\circ = 80^\circ$

$\Rightarrow x = 60^\circ$ olur. $\quad$ $\Rightarrow 2y = 90^\circ \Rightarrow y = 45^\circ$ olur.

Bu durumda $x + y = 60^\circ + 45^\circ = 105^\circ$ bulunur.



Köşesi çemberin üzerinde olan ve kolları çemberi iki farklı noktada kesen açıya çemberin bir çevre açısı denir.

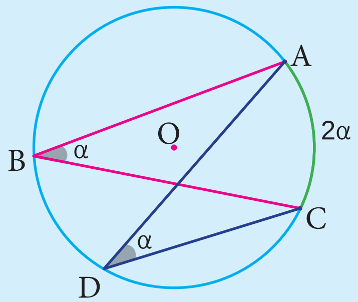
Yandaki O merkezli çemberde ABC açısının köşesi çemberin üzerinde olduğundan çemberin bir çevre açısıdır ve bu açı çemberin AC yayını görür. AC yayının ölçüsü $m(\overset{\frown}{AC})$ ile gösterilir.

Bir çemberde çevre açının ölçüsü, gördüğü yayın ölçüsünün yarısına eşittir. Bu durumda

$$m(\overset{\frown}{AC}) = 2 \cdot m(\widehat{ABC})$$

olur.

Sonuç

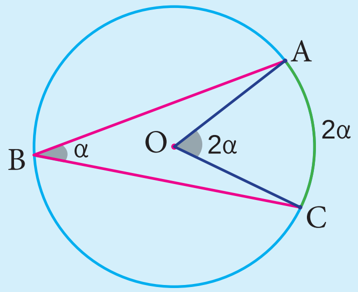


Bir çemberde aynı yayı gören çevre açıların ölçüleri birbirine eşittir.

Yandaki O merkezli çemberde ABC ve ADC çevre açıları AC yayını gördüğünden

$$m(\overset{\frown}{AC}) = 2\alpha$$
$$m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ADC}) = \alpha$$

olur.

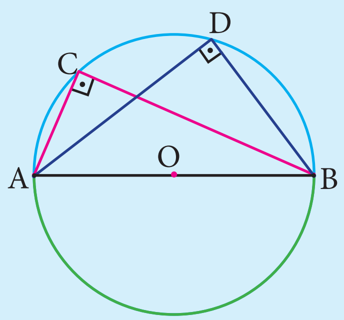


Aynı yayı gören merkez açının ölçüsü çevre açısının ölçüsünün iki katına eşittir.

Yandaki O merkezli çemberde AOC merkez açısı ile ABC çevre açısı aynı yayı gördüğünden

$$m(\overset{\frown}{AC}) = m(\widehat{AOC}) = 2\alpha$$
$$m(\widehat{ABC}) = \alpha$$

olur.



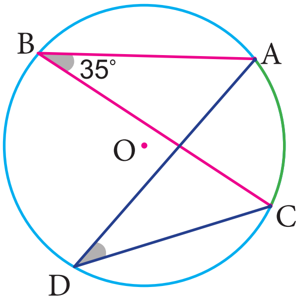
Çap çemberi iki eş parçaya ayırdığından çapı gören çevre açıların ölçüsü 90° dir.

Yandaki O merkezli çemberde ACB ve ADB çevre açıları çapı gördüğünden

$$m(\overset{\frown}{AB}) = 180^\circ$$
$$m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{ADB}) = 90^\circ$$

olur.

ÖRNEK



Yandaki O merkezli çemberde

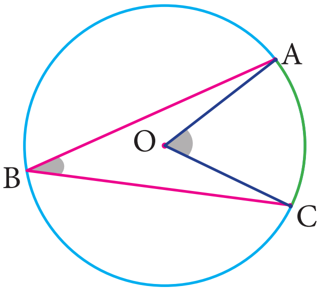
$m(\widehat{ABC}) = 35^\circ$

olduğuna göre $m(\widehat{ADC})$ nü bulunuz.

ÇÖZÜM

O merkezli çemberde ABC ile ADC çevre açısı aynı yayı gördüğünden ölçüleri eşittir. Bu durumda $m(\widehat{ADC}) = m(\widehat{ABC}) = 35^\circ$ bulunur.

ÖRNEK



Yandaki O merkezli çemberde

$m(\widehat{AC}) = 82^\circ$

olduğuna göre $m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{AOC})$ toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

O merkezli çemberde AOC merkez açısının ölçüsü, gördüğü AC yayının ölçüsüne eşittir.

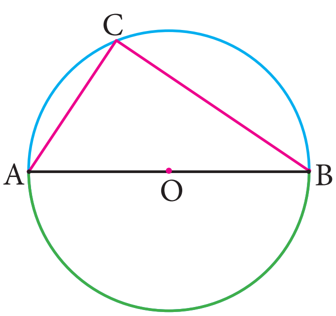
$m(\widehat{AOC}) = m(\widehat{AC}) = 82^\circ$ olur.

O merkezli çemberde ABC merkez açısının ölçüsü, gördüğü AC yayının ölçüsünün yarısına eşittir.

$m(\widehat{ABC}) = \dfrac{m(\widehat{AC})}{2} = \dfrac{82^\circ}{2} = 41^\circ$ olur.

Bu durumda $m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{AOC}) = 41^\circ + 82^\circ = 123^\circ$ bulunur.

ÖRNEK

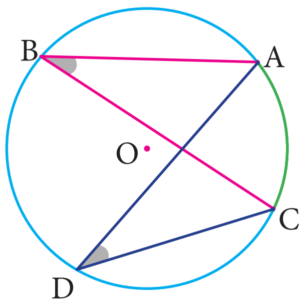


Yandaki O merkezli çemberde $[AB]$ çap olduğuna göre $m(\widehat{ACB})$ nü bulunuz.

ÇÖZÜM

Bir çemberde çapı gören çevre açı 90° dir. O merkezli çemberde ACB çevre açısı çapı gördüğünden $m(\widehat{ACB}) = 90^\circ$ bulunur.

ÖRNEK



Yandaki O merkezli çemberde

$m(\widehat{ABC}) = 5x - 15^\circ$

$m(\widehat{ADC}) = 3x + 7^\circ$

olduğuna göre AC yayının ölçüsünü bulunuz.

ÇÖZÜM

O merkezli çemberde ABC ile ADC çevre açısı aynı yayı gördüğünden ölçüleri eşittir. Bu durumda

$$m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ADC}) \Rightarrow 5x - 15^\circ = 3x + 7^\circ$$
$$\Rightarrow 5x - 3x = 7^\circ + 15^\circ$$
$$\Rightarrow 2x = 22^\circ$$
$$\Rightarrow x = 11^\circ \text{ olur.}$$

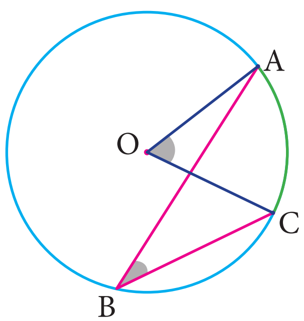
$x = 11^\circ$ olduğundan

$$m(\widehat{ABC}) = 5x - 15^\circ = 5.11^\circ - 15 = 40^\circ \text{ olur.}$$

ABC çevre açısı AC yayını gördüğünden

$m(\overset{\frown}{AC}) = 2 \cdot m(\widehat{ABC}) \Rightarrow m(\overset{\frown}{AC}) = 2 \cdot 40^\circ = 80^\circ$ bulunur.

ÖRNEK



Yandaki O merkezli çemberde

$m(\widehat{AOC}) = 5x - 15^\circ$

$m(\widehat{ABC}) = 52^\circ - x$

olduğuna göre AC yayının ölçüsünü bulunuz.

ÇÖZÜM

O merkezli çemberde AOC merkez açısı ile ABC çevre açısı aynı yayı gördüğünden

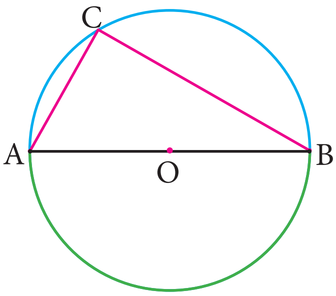
$$m(\widehat{AOC}) = 2 \cdot m(\widehat{ABC}) \Rightarrow 5x - 15^\circ = 2 \cdot (52^\circ - x)$$
$$\Rightarrow 5x - 15^\circ = 104^\circ - 2x$$
$$\Rightarrow 5x + 2x = 104^\circ + 15^\circ$$
$$\Rightarrow 7x = 119$$
$$\Rightarrow x = 17 \text{ olur.}$$

$x = 17^\circ$ olduğundan

$$m(\widehat{AOC}) = 5x - 15^\circ = 5 \cdot 17^\circ - 15 = 70^\circ \text{ olur.}$$

AOC merkez açısı AC yayını gördüğünden $m(\overset{\frown}{AC}) = m(\widehat{AOC}) = 70^\circ$ bulunur.

ÖRNEK

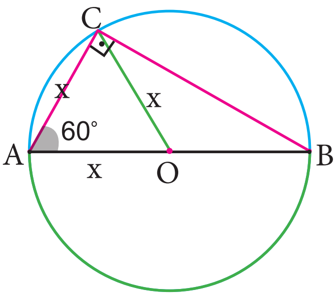


Yandaki O merkezli ve $[AB]$ çaplı çemberde

$|AB| = 2 \cdot |AC|$

olduğuna göre $m(\widehat{ABC})$ nü bulunuz.

ÇÖZÜM



Bir çemberde çapı gören çevre açı 90° dir. O merkezli çemberde ACB çevre açısı çapı gördüğünden $m(\widehat{ACB}) = 90^\circ$ olur.

$[AB]$ çap ve $|AB| = 2 \cdot |AC|$ olduğundan $|AB| = 2x \Rightarrow |AC| = x$ olur.

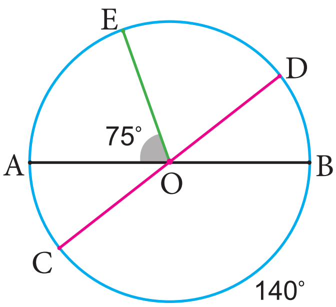
$[OC]$ çizilirse çemberin yarıçapı olduğu görülür. Bu durumda

$|OC| = |AC| = |OC| = x$ olup AOC eşkenar üçgeni elde edilir. Eşkenar üçgenlerin her bir iç açısının ölçüsü 60° olduğundan $m(\widehat{CAB}) = 60^\circ$ olur.

ABC dik üçgeninin iç açılarının ölçülerinin toplamı 180° olduğundan

$$m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{CAB}) + m(\widehat{ACB}) = 180^\circ \Rightarrow m(\widehat{ABC}) + 60^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$
$$\Rightarrow m(\widehat{ABC}) + 150^\circ = 180^\circ \Rightarrow m(\widehat{ABC}) = 30^\circ \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK



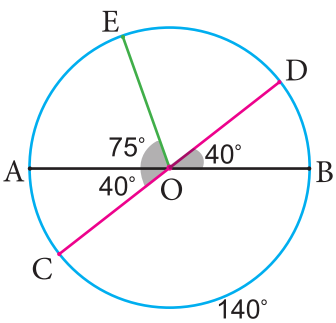
Yandaki O merkezli çemberde $[AB]$ ve $[CD]$ çap

$m(\widehat{BC}) = 140^\circ$

$m(\widehat{AOE}) = 75^\circ$

olduğuna göre $m(\widehat{DE})$ nü bulunuz.

ÇÖZÜM



O merkezli çemberde $[AB]$ çap olduğundan AC yayının ölçüsü ile BC yayının ölçüsünün toplamı 180 derece olur.

$$m(\widehat{AC}) + m(\widehat{BC}) = 180^\circ \Rightarrow m(\widehat{AC}) + 140^\circ = 180^\circ$$
$$\Rightarrow m(\widehat{AC}) = 40^\circ \text{ olur.}$$

AOC ile DOB ters açılarının ölçüleri eşit olacağından

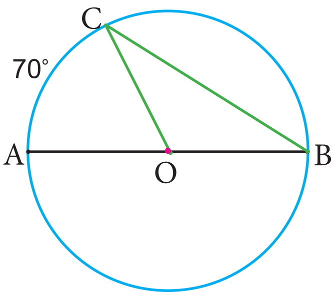
$m(\widehat{DOB}) = m(\widehat{AOC}) = 40^\circ$ olur. $[AB]$ çap olduğundan

$$m(\widehat{AOE}) + m(\widehat{EOD}) + m(\widehat{DOB}) = 180^\circ \Rightarrow 75^\circ + m(\widehat{EOD}) + 40^\circ = 180^\circ$$
$$\Rightarrow 75^\circ + m(\widehat{EOD}) + 40^\circ = 180^\circ$$
$$\Rightarrow m(\widehat{EOD}) = 65^\circ \text{ olur.}$$

EOD merkez açısının ölçüsü gördüğü DE yayının ölçüsüne eşit olacağından

$m(\widehat{DE}) = m(\widehat{EOD}) = 65^\circ$ bulunur.

ÖRNEK

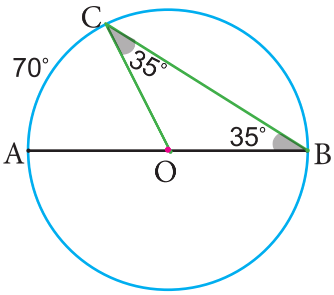


Yandaki O merkezli ve $[AB]$ çaplı çemberde

$m(\overset{\frown}{AC}) = 70^\circ$

olduğuna göre $m(\widehat{OCB})$ nü bulunuz.

ÇÖZÜM



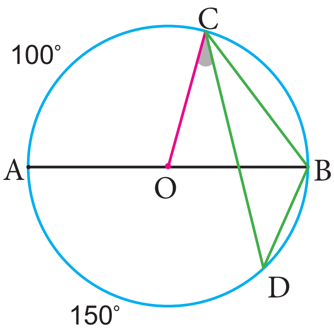
O merkezli çemberde ABC çevre açısı gördüğü AC yayının ölçüsünün yarısına eşit olacağından

$$m(\widehat{ABC}) = \frac{m(\overset{\frown}{AC})}{2} = \frac{70^\circ}{2} = 35^\circ \text{ olur.}$$

$[OC]$ ve $[OB]$ yarıçap olduğundan OBC ikizkenar üçgendir.

OBC ikizkenar üçgeninde $m(\widehat{OCB}) = m(\widehat{OBC}) = 35^\circ$ bulunur.

ÖRNEK



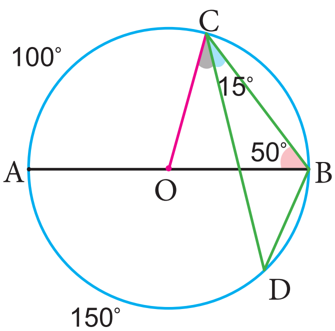
Yandaki O merkezli ve $[AB]$ çaplı çemberde

$m(\overset{\frown}{AC}) = 100^\circ$

$m(\overset{\frown}{AD}) = 150^\circ$

olduğuna göre $m(\widehat{OCD})$ nü bulunuz.

ÇÖZÜM



O merkezli çemberde $[AB]$ çap olduğundan

$$m(\overset{\frown}{AD}) + m(\overset{\frown}{DB}) = 180^\circ \Rightarrow 150^\circ + m(\overset{\frown}{DB}) = 180^\circ$$

$$\Rightarrow m(\overset{\frown}{DB}) = 30^\circ \text{ olur.}$$

O merkezli çemberde DCB çevre açısı

$$m(\widehat{DCB}) = \frac{m(\overset{\frown}{DB})}{2} = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ \text{ olur.}$$

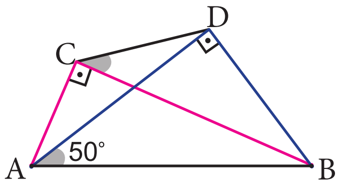
O merkezli çemberde ABC çevre açısı

$$m(\widehat{ABC}) = \frac{m(\overset{\frown}{AC})}{2} = \frac{100^\circ}{2} = 50^\circ \text{ olur.}$$

$[OC]$ ve $[OB]$ yarıçap olduğundan OBC ikizkenar üçgeninde $m(\widehat{OCB}) = m(\widehat{OBC}) = 50^\circ$ olur.

Bu durumda $m(\widehat{OCD}) + m(\widehat{DCB}) = m(\widehat{OCB}) \Rightarrow m(\widehat{OCD}) + 15^\circ = 50^\circ \Rightarrow m(\widehat{OCD}) = 35^\circ$ bulunur.

ÖRNEK



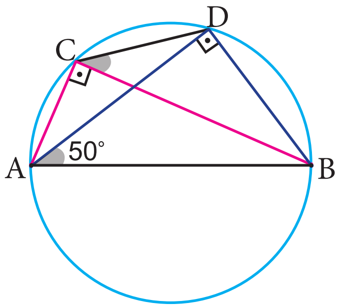
Yanda ACB ve ADB dik üçgenleri verilmiştir.

$[AC] \perp [CB]$ ve $[AD] \perp [DB]$

$m(\widehat{DAB}) = 50^\circ$

olduğuna göre $m(\widehat{DCB})$ nü bulunuz.

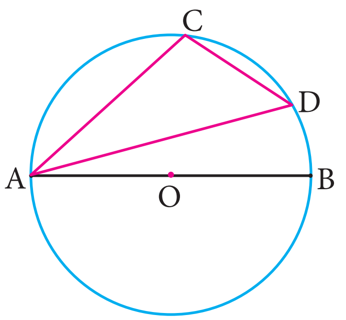
ÇÖZÜM



Bir çemberde çapı gören çevre açı 90° dir. ACB ve ADB açılarının gördüğü $[AB]$ nı çap kabul eden çember çizilirse bu çember C ve D noktalarından geçer.

Bu çemberde aynı yayı gören BAD ile BCD çevre açısının ölçüsü eşittir. Bu durumda $m(\widehat{BCD}) = m(\widehat{BAD}) = 50^\circ$ olur.

ÖRNEK

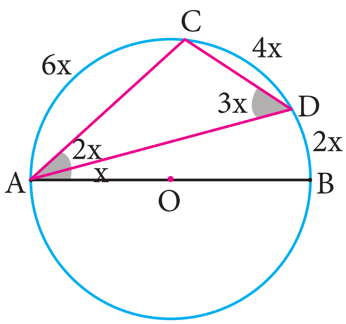


Yandaki O merkezli ve $[AB]$ çaplı çemberde

$6 \cdot m(\widehat{BAD}) = 3 \cdot m(\widehat{DAC}) = 2 \cdot m(\widehat{ADC})$

olduğuna göre $m(\widehat{ACD})$ nü bulunuz.

ÇÖZÜM



$6 \cdot m(\widehat{BAD}) = 3 \cdot m(\widehat{DAC}) = 2 \cdot m(\widehat{ADC}) = 6x$ olsun. Bu durumda

$6 \cdot m(\widehat{BAD}) = 6x \Rightarrow m(\widehat{BAD}) = x$

$3 \cdot m(\widehat{DAC}) = 6x \Rightarrow m(\widehat{DAC}) = 2x$

$2 \cdot m(\widehat{ADC}) = 6x \Rightarrow m(\widehat{ADC}) = 3x$ olur.

BAD çevre açısı DB yayını gördüğünden $m(\overset{\frown}{DB}) = 2x$

DAC çevre açısı CD yayını gördüğünden $m(\overset{\frown}{DC}) = 4x$

ADC çevre açısı AC yayını gördüğünden $m(\overset{\frown}{AC}) = 6x$ olur.

$[AB]$ çap olduğundan

$m(\overset{\frown}{BD}) + m(\overset{\frown}{DC}) + m(\overset{\frown}{AC}) = 180^\circ \Rightarrow 2x + 4x + 6x = 180^\circ \Rightarrow 12x = 180^\circ \Rightarrow x = 15^\circ$ olur.

ACD üçgeninde $x = 15^\circ \Rightarrow m(\widehat{DAC}) = 2x = 30^\circ$ ve $m(\widehat{ADC}) = 3x = 45^\circ$ olur. Bu durumda

$m(\widehat{DAC}) + m(\widehat{ADC}) + m(\widehat{ACD}) = 180^\circ \Rightarrow 30^\circ + 45^\circ + m(\widehat{ACD}) = 180^\circ$

$\Rightarrow 75^\circ + m(\widehat{ACD}) = 180^\circ \Rightarrow m(\widehat{ACD}) = 105^\circ$ bulunur.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki cümlelerde boş bırakılan yerleri uygun sözcüklerle tamamlayınız.

I. Köşesi çemberin merkezinde olan açıya .... denir.

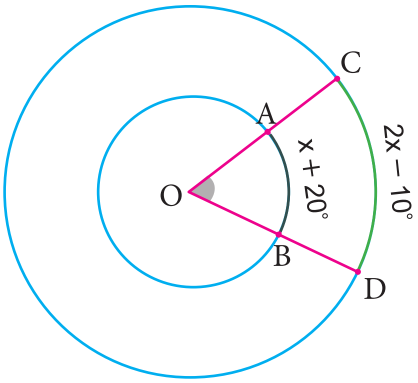
II. Çemberde merkez açı ile merkez açının gördüğü yayın ölçüsü .... tir.

III. Köşesi çemberin üzerinde olan açıya ....denir.

IV. Çemberde çevre açının ölçüsü, gördüğü yayın ölçüsünün .... eşittir.

V. Çapı gören çevre açının ölçüsü .... derecedir.

2.



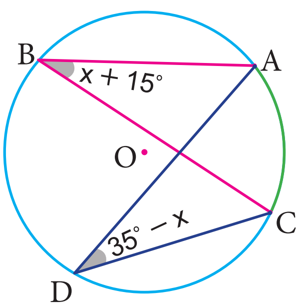
Yukarıdaki şekilde O merkezli iki çember verilmiştir.

$m(\overset{\frown}{AB}) = x + 20^\circ$

$m(\overset{\frown}{CD}) = 2x - 10^\circ$

olduğuna göre $m(\widehat{COD})$ nü bulunuz.

3.



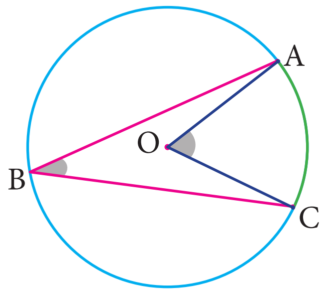
Yukarıdaki O merkezli çemberde

$m(\widehat{ABC}) = x + 15^\circ$

$m(\widehat{ADC}) = 35^\circ - x$

olduğuna göre $m(\overset{\frown}{AC})$ nü bulunuz.

4.

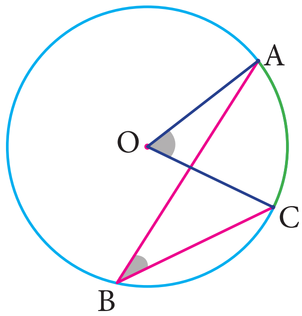


Yukarıdaki O merkezli çemberde

$m(\overset{\frown}{AC}) = 72^\circ$

olduğuna göre $m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{AOC})$ toplamını bulunuz.

5.



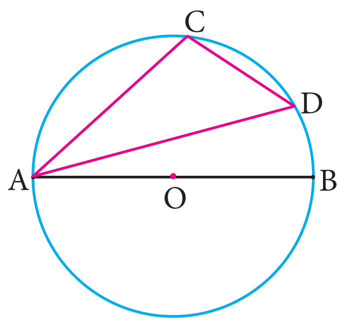
Yukarıdaki O merkezli çemberde

$m(\widehat{AOC}) = 3x - 20^\circ$

$m(\widehat{ABC}) = 65^\circ - x$

olduğuna göre $m(\overset{\frown}{AC})$ nü bulunuz.

6.



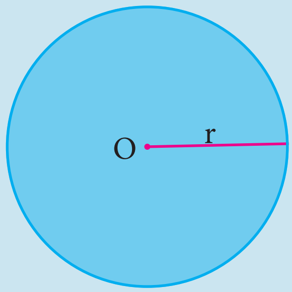
Yukarıdaki O merkezli ve $[AB]$ çaplı çemberde

$15 \cdot m(\widehat{BAD}) = 5 \cdot m(\widehat{DAC}) = 3 \cdot m(\widehat{ADC})$

olduğuna göre $m(\overset{\frown}{ACD})$ nü bulunuz.

12.3.3. DAİRENİN ÇEVRESİ VE ALAN

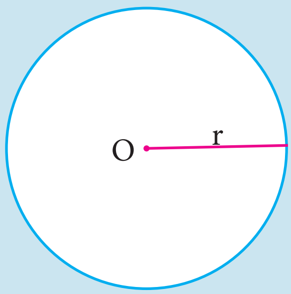
12.3.3.1. Dairenin Çevre ve Alan Bağıntıları



Bir çember ve iç bölgesinin birleşim kümesine daire denir.

Yandaki şekilde O merkezli r yarıçaplı daire gösterilmiştir.

Dairenin Çevresi



Bütün çemberlerde çevre uzunluğunun çapa oranı sabit bir sayıya eşittir ve bu sayı π ile gösterilen irrasyonel bir sayıdır.

π sabit sayısı $\pi = 3,141592\ldots$ dir.

r yarıçaplı bir çemberin çevre uzunluğu Ç olsun. Bu durumda çemberin çevresi

$$\frac{Ç}{2r} = \pi \Rightarrow \mathbf{Ç = 2\pi r}$$

ile hesaplanır.

ÖRNEK

Yarıçapı 6 cm olan bir çemberin çevresinin kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

r yarıçaplı bir çemberin çevre uzunluğu $Ç = 2\pi r$ olduğundan yarıçapı $r = 6$ cm olan çemberin çevresi $Ç = 2\pi r \Rightarrow Ç = 2\pi \cdot 6 \Rightarrow Ç = 12\pi$ cm bulunur.

ÖRNEK

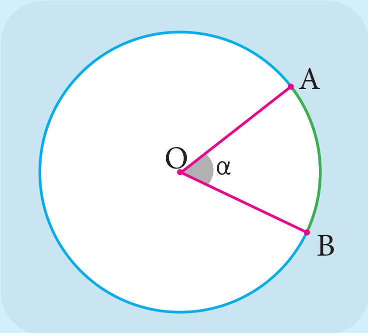
Çevresi 20π cm olan bir çemberin çapının kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

r yarıçaplı bir çemberin çevre uzunluğu $Ç = 2\pi r$ olduğundan çevresi 20π cm olan çemberin yarıçapı $Ç = 2\pi r \Rightarrow 20\pi = 2\pi \cdot r \Rightarrow r = 10$ cm olur.

Bu durumda çemberin çapı $2r = 2 \cdot 10 = 20$ cm bulunur.

Yay Uzunluğu

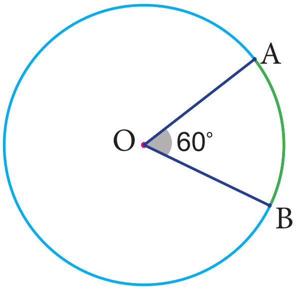


Yarıçapı r olan O merkezli bir çemberde AB yayının uzunluğu $|\overset{\frown}{AB}|$ şeklinde gösterilir. AB yayını gören merkez açı α ise AB yayının uzunluğu, bu yayı gören merkez açı ile orantılı olduğundan

$$|\overset{\frown}{AB}| = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$$

ile hesaplanır.

ÖRNEK



Yandaki yarıçapı 6 cm olan O merkezli çemberde

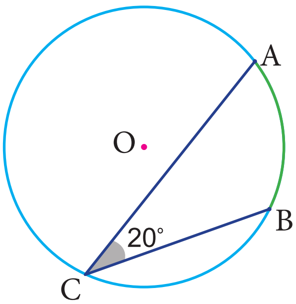
$$m(\widehat{AOB}) = 60^\circ$$

olduğuna göre AB yayının uzunluğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

O merkezli çemberde $r = 6$ cm ve AB yayını gören merkez açı $\alpha = 60^\circ$ olduğundan AB yayının uzunluğu $|\overset{\frown}{AB}| = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} \Rightarrow |\overset{\frown}{AB}| = 2\pi \cdot 6 \cdot \frac{60^\circ}{360^\circ} \Rightarrow |\overset{\frown}{AB}| = 2\pi \cdot \frac{360^\circ}{360^\circ} \Rightarrow |\overset{\frown}{AB}| = 2\pi$ cm bulunur.

ÖRNEK



Yandaki yarıçapı 9 cm olan O merkezli çemberde

$$m(\widehat{ACB}) = 20^\circ$$

olduğuna göre AB yayının uzunluğunu bulunuz.

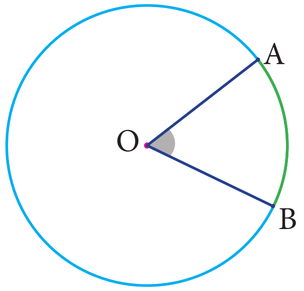
ÇÖZÜM

O merkezli çemberde AB yayını gören çevre açının ölçüsü 20° olduğundan AB yayını gören merkez açının ölçüsü 40° olur. $r = 6$ cm ve AB yayını gören merkez açı $\alpha = 40^\circ$ olduğundan AB yayının uzunluğu

$$|\overset{\frown}{AB}| = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} \Rightarrow |\overset{\frown}{AB}| = 2\pi \cdot 9 \cdot \frac{40^\circ}{360^\circ}$$

$$\Rightarrow |\overset{\frown}{AB}| = 2\pi \text{ cm bulunur.}$$

ÖRNEK



Yandaki çevresi 32π cm olan O merkezli çemberde AB yayının uzunluğu 4π cm olduğuna göre $m(\widehat{AOB})$ nü bulunuz.

ÇÖZÜM

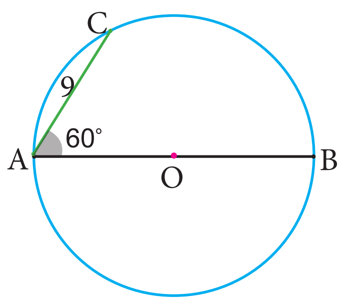
O merkezli çemberin çevresi 32π olduğundan

$$Ç = 2\pi r \Rightarrow 32\pi = 2\pi r$$
$$\Rightarrow r = 16 \text{ cm bulunur.}$$

$r = 16$ cm, $|\overset{\frown}{AB}| = 4\pi$ cm ve AB yayını gören merkez açı $m(\widehat{AOB}) = \alpha$ olsun. Bu durumda

$$|\overset{\frown}{AB}| = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} \Rightarrow 4\pi = 2\pi \cdot 16 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$$
$$\Rightarrow 4\pi \cdot 360^\circ = 32\pi \cdot \alpha$$
$$\Rightarrow \alpha = \frac{4\pi \cdot 360^\circ}{32\pi}$$
$$\Rightarrow \alpha = 45^\circ \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK



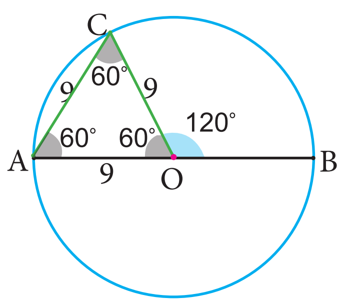
Yandaki O merkezli çemberde

$m(\widehat{CAB}) = 60^\circ$

$|AC| = 9$ cm

olduğuna göre BC yayının uzunluğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



$[OC]$ çizilirse $|AO| = |OC| = r$ olacağından

$m(\widehat{OAC}) = m(\widehat{OCA}) = 60^\circ$ olur.

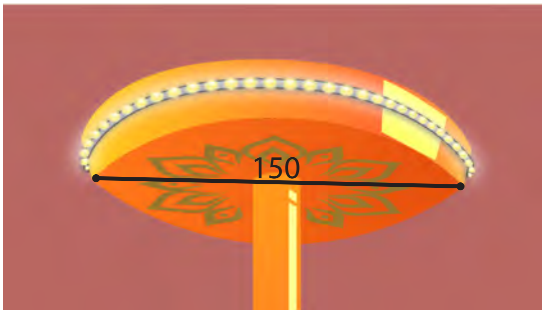
Bu durumda AOC üçgeninin eşkenar üçgen olduğu görülür. Buradan çemberin yarıçapı 9 cm ve $m(\widehat{AOC}) = 60^\circ$ bulunur.

$$m(\widehat{AOC}) + m(\widehat{BOC}) = 180^\circ \Rightarrow 60^\circ + m(\widehat{BOC}) = 180^\circ$$
$$\Rightarrow m(\widehat{BOC}) = 120^\circ \text{ olur.}$$

O merkezli çemberde $r = 9$ cm ve BC yayını gören merkez açı $\alpha = 120^\circ$ olduğundan BC yayının uzunluğu

$$|\overset{\frown}{BC}| = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} \Rightarrow |\overset{\frown}{BC}| = 2\pi \cdot 9 \cdot \frac{120^\circ}{360^\circ}$$
$$\Rightarrow |\overset{\frown}{BC}| = 2\pi \cdot 9 \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow |\overset{\frown}{BC}| = 6\pi \text{ cm bulunur.}$$

ÖRNEK



Ahmet Usta, 150 cm çapında olan daire biçimindeki tavan süslemesinin etrafını bir sıra aydınlatma şeriti ile çevirecektir.

Aydınlatma şeridinin metre fiyatı 50 TL olduğuna göre bu işlem için gerekli tutarın kaç TL olacağını bulunuz.

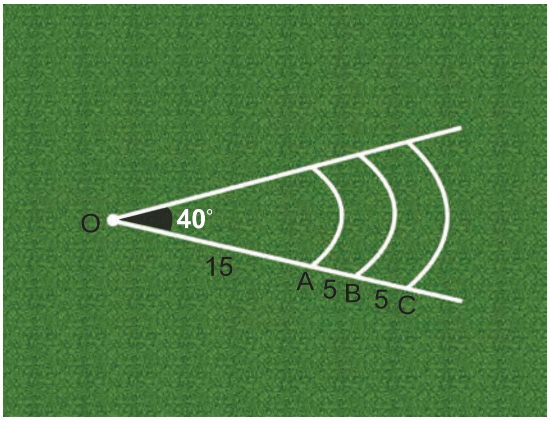
($\pi = 3$ alınız.)

ÇÖZÜM

Çapı 150 cm olan tavan süslemesinin yarıçapı $r = 75 \text{ cm} = 0,75 \text{ m}$ olduğundan tavan süslemesinin çevresi $2\pi r = 2 \cdot 3 \cdot 0,75 = 4,5 \text{ m}^2$ olur.

Bu durumda aydınlatma şeridinin tutarı $4,5 \cdot 50 = 225$ TL bulunur.

ÖRNEK



Bir spor kulübü olimpiyatlarda disk atma kategorisinde yarışacak sporcular yetiştirmek amacıyla bir saha yaptıracaktır. Disk atma sahası, merkezden atılacak yöne doğru 40 derecelik bir görüş açısı ile belirlenmektedir.

Bu sahada atış mesafelerini belirlemek için şekildeki gibi merkezden 15, 20 ve 25 metre uzaklıkta üç tane beyaz yay çizilecektir.

Çizilecek yayların 1 metresini 12 dakikada çizilebilen Faruk Usta'nın saatlik çalışma ücreti 150 TL dir.

Buna göre tüm yayların çizimi için Faruk Usta'ya ödenecek ücretin kaç TL olduğunu bulunuz.

($\pi = 3$ alınız.)

ÇÖZÜM

Merkezden 15 m uzaklıkta çizilecek olan yay, yarıçapı 15 m olan bir dairede 40 derecelik açının gördüğü yay uzunluğu olacağından bu yayın uzunluğu

$$2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} = 2 \cdot 3 \cdot 15 \cdot \frac{40^\circ}{360^\circ} = 10 \text{ m olur.}$$

Merkezden 20 m uzaklıkta çizilecek olan yay, yarıçapı 20 m olan bir dairede 40 derecelik açının gördüğü yay uzunluğu olacağından bu yayın uzunluğu

$$2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} = 2 \cdot 3 \cdot 20 \cdot \frac{40^\circ}{360^\circ} = \frac{40}{3} \text{ m olur.}$$

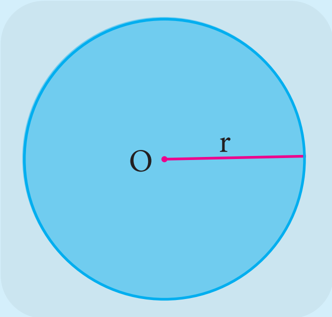
Merkezden 25 m uzaklıkta çizilecek olan yay, yarıçapı 25 m olan bir dairede 40 derecelik açının gördüğü yay uzunluğu olacağından bu yayın uzunluğu

$$2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} = 2 \cdot 3 \cdot 25 \cdot \frac{40^\circ}{360^\circ} = \frac{50}{3} \text{ m olur.}$$

O hâlde çizilecek yayların toplam uzunluğu $10 + \frac{40}{3} + \frac{50}{3} = 40$ m bulunur.

Bu durumda Faruk Usta tüm yayların çizimini $40 \cdot 12 = 480$ dakikada tamamlar. Böylece 8 saat çalışmış olan Faruk Usta'ya ödenecek tutar $8 \cdot 150 = 1200$ TL olarak bulunur.

Dairenin Alanı



r yarıçaplı bir dairenin alanı
$\mathbf{A = \pi r^2}$
ile hesaplanır.

ÖRNEK

Yarıçapı 6 cm olan bir dairenin alanını bulunuz.

ÇÖZÜM

r yarıçaplı bir dairenin alanı $A = \pi r^2$ olduğundan yarıçapı $r = 6$ cm olan dairenin alanı

$$A = \pi r^2 \Rightarrow A = \pi \cdot 6^2$$
$$\Rightarrow A = 36\pi \text{ cm}^2 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

Alanı 25π cm^2 olan bir dairenin çapının kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

r yarıçaplı bir dairenin alanı $A = \pi r^2$ olduğundan alanı 25π cm olan çemberin yarıçapı

$$A = \pi r^2 \Rightarrow 25\pi = \pi \cdot r^2$$
$$\Rightarrow r = 5 \text{ cm olur.}$$

Bu durumda dairenin çapı $2r = 2 \cdot 5 = 10$ cm bulunur.

ÖRNEK

Çevresi 30π cm olan bir dairenin alanını bulunuz.

ÇÖZÜM

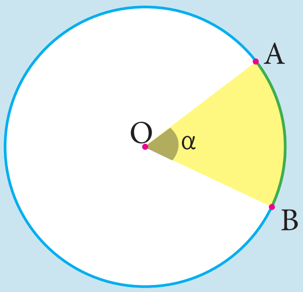
r yarıçaplı bir dairenin çevre uzunluğu $Ç = 2\pi r$ olduğundan çevresi 30π cm olan dairenin yarıçapı

$$Ç = 2\pi r \Rightarrow 30\pi = 2\pi \cdot r$$
$$\Rightarrow r = 15 \text{ cm olur.}$$

r yarıçaplı bir dairenin alanı $A = \pi r^2$ olduğundan yarıçapı $r = 15$ cm olan dairenin alanı

$$A = \pi r^2 \Rightarrow A = \pi \cdot 15^2$$
$$\Rightarrow A = 225\pi \text{ cm}^2 \text{ bulunur.}$$

Dairenin Diliminin Alanı

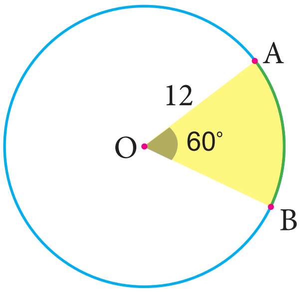


Bir dairede α merkez açısının kolları ve bu açının gördüğü yay ile sınırlanan bölgeye **daire dilimi** denir. Yarıçapı r ve merkez açısının ölçüsü α olan daire diliminin alanı merkez açının ölçüsü ile orantılı olduğundan

$$\mathbf{A = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}}$$

ile hesaplanır.

ÖRNEK



Yandaki yarıçapı 12 cm olan O merkezli çemberde

$m(\widehat{AOB}) = 60^\circ$

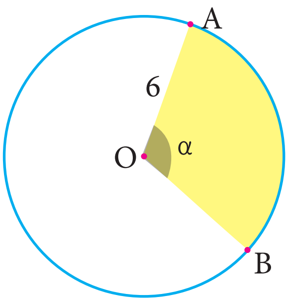
olduğuna göre boyalı daire diliminin alanını bulunuz.

ÇÖZÜM

Yarıçapı $r = 12$ cm ve AB yayını gören merkez açısının ölçüsü 60° olan daire diliminin alanı

$A = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} \Rightarrow A = \pi \cdot 12^2 \cdot \frac{60^\circ}{360^\circ} \Rightarrow A = \pi \cdot 144 \cdot \frac{1}{6} \Rightarrow A = 24\pi \text{ cm}^2$ bulunur.

ÖRNEK



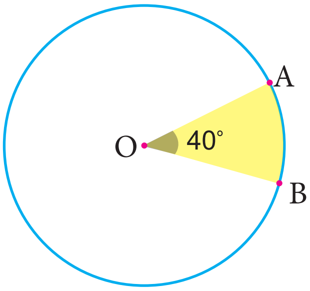
Yandaki yarıçapı 6 cm olan O merkezli çemberde boyalı daire diliminin alanı $10\pi \text{ cm}^2$ olduğuna göre $m(\widehat{AOB})$ nü bulunuz.

ÇÖZÜM

Yarıçapı $r = 6$ cm ve alanı $10\pi \text{ cm}^2$ olan daire diliminin AB yayını gören merkez açısının ölçüsü olan α

$A = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} \Rightarrow 10\pi = \pi \cdot 6^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} \Rightarrow 10\cancel{\pi} = \cancel{\pi} \cdot \cancel{36} \cdot \frac{\alpha}{\cancel{360^\circ}_{10^\circ}} \Rightarrow \alpha = 100^\circ$ bulunur.

ÖRNEK



Yandaki O merkezli çemberde

$m(\widehat{AOB}) = 40^\circ$

$|\widehat{AB}| = 2\pi$ cm

olduğuna göre boyalı daire diliminin alanını bulunuz.

ÇÖZÜM

O merkezli dairede AB yayını gören merkez açısının ölçüsü 40° olduğundan dairenin yarıçapı

$$|\widehat{AB}| = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} \Rightarrow 2\pi = 2\pi \cdot r \cdot \frac{40^\circ}{360^\circ}$$

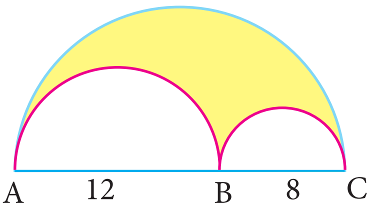
$$\Rightarrow 2\pi = \frac{2\pi \cdot r}{9} \Rightarrow 18\pi = 2\pi \cdot r \Rightarrow r = 9 \text{ cm olur.}$$

Yarıçapı $r = 9$ cm ve AB yayını gören merkez açısının ölçüsü 40° olan daire diliminin alanı

$$A = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} \Rightarrow A = \pi \cdot 9^2 \cdot \frac{40^\circ}{360^\circ}$$

$$\Rightarrow A = \pi \cdot 81 \cdot \frac{1}{9} \Rightarrow A = 9\pi \text{ cm}^2 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK



Yanda $[AB]$, $[BC]$ ve $[AC]$ çaplı yarım daireler verilmiştir.

$|AB| = 12$ cm

$|BC| = 8$ cm

olduğuna göre şekildeki boyalı bölgenin alanını bulunuz.

ÇÖZÜM

$|AB| = 12$ cm olduğundan $[AB]$ çaplı yarım dairenin yarıçapı 6 cm olup bu yarım dairenin alanı

$$A = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} \Rightarrow A = \pi \cdot 6^2 \cdot \frac{180^\circ}{360^\circ}$$

$$\Rightarrow A = 18\pi \text{ cm}^2 \text{ olur.}$$

$|BC| = 8$ cm olduğundan $[BC]$ çaplı yarım dairenin yarıçapı 4 cm olup bu yarım dairenin alanı

$$A = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} \Rightarrow A = \pi \cdot 4^2 \cdot \frac{180^\circ}{360^\circ}$$

$$\Rightarrow A = 8\pi \text{ cm}^2 \text{ olur.}$$

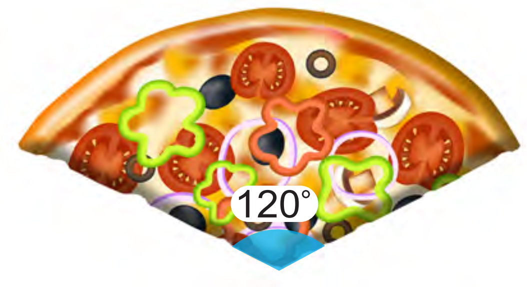
$|AC| = 20$ cm olduğundan $[AC]$ çaplı yarım dairenin yarıçapı 10 cm olup bu yarım dairenin alanı

$$A = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} \Rightarrow A = \pi \cdot 10^2 \cdot \frac{180^\circ}{360^\circ}$$

$$\Rightarrow A = 50\pi \text{ cm}^2 \text{ olur.}$$

Boyalı bölgenin alanı, $[AC]$ çaplı yarım dairenin alanından $[AB]$ ve $[BC]$ çaplı yarım dairelerin alanı çıkarılarak bulunur. Bu durumda boyalı bölgenin alanı $50\pi - 18\pi - 8\pi = 24\pi$ cm^2 bulunur.

ÖRNEK



Pizza fiyatlarını pizzanın alanına göre hesaplayarak satan bir pizzacıda 1 cm^2 pizza fiyatı 0,5 TL olarak ücretlendirilmektedir.

Mert, çapı 22 cm olan bir pizzadan merkez açısının ölçüsü 120 derece olan bir dilim alıyor.

Buna göre Mert'in ödeyeceği ücretin kaç TL olduğunu bulunuz.

($\pi = 3$ alınız.)

ÇÖZÜM

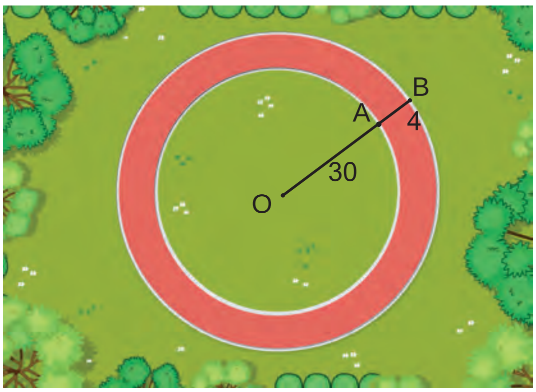
Pizzanın çapı 22 cm olduğundan yarıçapı 11 cm dir. Mert'in aldığı merkez açısının ölçüsü 120° ve yarıçapı 15 cm olan pizza diliminin alanı

$$A = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} \Rightarrow A = 3 \cdot 11^2 \cdot \frac{120^\circ}{360^\circ}$$

$$\Rightarrow A = 121 \text{ cm}^2 \text{ olur.}$$

Bu durumda Mert'in aldığı pizza diliminin ücreti $121 \cdot 0,5 = 60,5$ TL bulunur.

ÖRNEK



Park ve Bahçeler Müdürlüğü yetkilileri belirledikleri bir parka şekildeki gibi ortası yeşil alan olan dairesel bir yürüyüş parkuru yapmak istiyor.

Parkurun ortasındaki yeşil alanın yarıçapı 30 metre ve parkurun genişliği 4 metredir.

Şekildeki kırmızı renkle gösterilen yürüyüş parkurunun metrekare maliyeti 600 TL ve yeşil alanın metrekare maliyeti 120 TL olduğuna göre bu parka yapılacak parkurun yeşil alanla birlikte toplam maliyetinin kaç TL olacağını bulunuz.

($\pi = 3$ alınız.)

ÇÖZÜM

Yeşil alan, yarıçapı 30 m olan bir daire olduğundan alanı

$$A = \pi r^2 \Rightarrow A = 3 \cdot 30^2$$

$$\Rightarrow A = 2700 \text{ m}^2 \text{ olur.}$$

Bu durumda yeşil alanın maliyeti $2700 \cdot 120 = 324\,000$ TL olur.

Kırmızı renkli parkurun alanı, yarıçapı 34 metre olan dairenin alanından yeşil alan çıkarılarak bulunacağından parkurun alanı

$$\begin{aligned} A &= 3 \cdot 34^2 - 3 \cdot 30^2 \\ &= 3468 - 2700 \text{ m}^2 \\ &= 768 \text{ m}^2 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Bu durumda parkurun maliyeti $768 \cdot 600 = 460\,800$ TL olur.

O hâlde parkur ile yeşil alanın toplam maliyeti $324\,000 + 460\,800 = 784\,800$ TL bulunur.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki cümlelerde boş bırakılan yerleri uygun sözcüklerle tamamlayınız.

I. Bir çember ve iç bölgesinin birleşim kümesine .... denir.

II. Bir çemberin çevre uzunluğunun çemberin çapına oranı .... sayısıdır.

III. Bir dairede α merkez açısının kolları ve bu açının gördüğü yay ile sınırlanan bölgeye .... denir.

IV. r yarıçaplı bir çemberin çevresinin uzunluğu .... ile hesaplanır.

V. r yarıçaplı bir dairenin alanı .... ile hesaplanır.

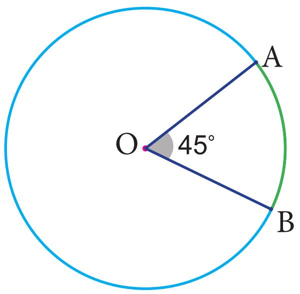
2. Yarıçapı 8 cm olan bir çemberin çevresinin kaç cm olduğunu bulunuz.

3. Çevresi 24π cm olan bir çemberin çapının kaç cm olduğunu bulunuz.

4. Yarıçapı 10 cm olan bir dairenin alanını bulunuz.

5. Alanı 25π cm^2 olan bir dairenin çapının kaç cm olduğunu bulunuz.

6.

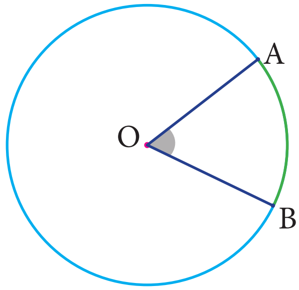


Yukarıdaki yarıçapı 8 cm olan O merkezli çemberde

$m(\widehat{AOB}) = 45^\circ$

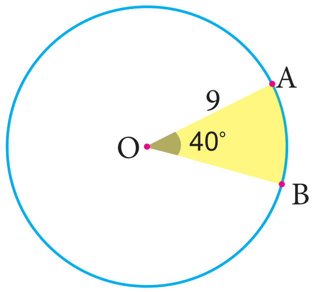
olduğuna göre AB yayının uzunluğunu bulunuz.

7.



Yukarıdaki çevresi 36π cm olan O merkezli çemberde AB yayının uzunluğu 6π cm olduğuna göre $m(\widehat{AOB})$ nü bulunuz.

8.

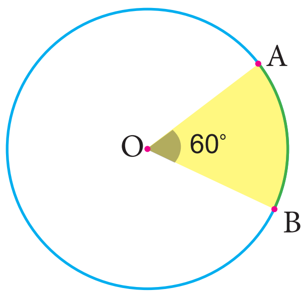


Yukarıdaki yarıçapı 9 cm olan O merkezli çemberde

$m(\widehat{AOB}) = 40^\circ$

olduğuna göre boyalı daire diliminin alanını bulunuz.

9.



Yukarıdaki O merkezli çemberde

$m(\widehat{AOB}) = 60^\circ$

$|\widehat{AB}| = 5\pi$ cm

olduğuna göre boyalı daire diliminin alanını bulunuz.

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

A) 1- 5. cümlelerde boş bırakılan yerlere uygun sözcükleri yazınız.

1. Bir çemberin çevre açısının köşesi çemberin .... dir.

2. Köşesi çemberin merkezinde olan açıya .... açı denir.

3. Köşesi çemberin üzerinde olan açının ölçüsü gördüğü yayın ölçüsünün .... katıdır.

4. Çemberde .... açının ölçüsü, gördüğü yayın ölçüsüne eşittir.

5. Çapı gören .... açının ölçüsü 90 derecedir.

B) 6. soruda verilen ifadelerden doğru olanların başına D, yanlış olanların başına Y yazınız.

( ) Çember ile bir ortak noktası olan doğruya çemberin bir keseni denir.

( ) Çemberi iki farklı noktada kesen doğruya çemberin bir teğeti denir.

( ) Kesenin çember içinde kalan parçasına çemberin çapı denir.

( ) Çemberde en uzun kiriş çemberin merkezinden geçer.

( ) Merkezden geçen kirişe kesen denir.

C) 7. soruda numaralı ifadeler ile harfli ifadeleri eşleştirerek doğru cevapları ilgili kutucuklara yazınız.

I. Ölçüsü 80 derece olan yayı gören merkez açının ölçüsüdür.

II. Ölçüsü 60 derece olan merkez açı ile aynı yayı gören çevre açının ölçüsüdür.

III. Çapı gören çevre açının ölçüsüdür.

IV. Çevresi 8π cm olan çemberin yarıçapının uzunluğudur.

V. Alanı 36π cm^2 olan çemberin yarıçapının uzunluğudur.

a . 90°

b . 4 cm

c . 80°

d . 6 cm

e . 30°

f . 5 cm

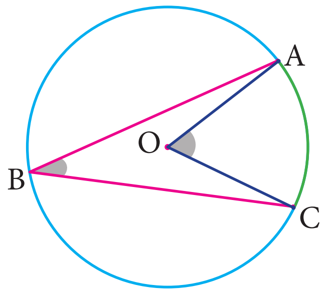
g . 45°

I.	II.	III.	IV.	V.

Ç) ***8-11. açık uçlu soruları cevaplandırınız.***

8. Yarıçapı $r = (2x + 3)$ cm olan bir çemberin merkezinin bir d doğrusuna olan uzaklığı $(15 - x)$ cm dir. Doğru ile çemberin yalnız bir ortak noktası olduğuna göre x değerini bulunuz.

9.



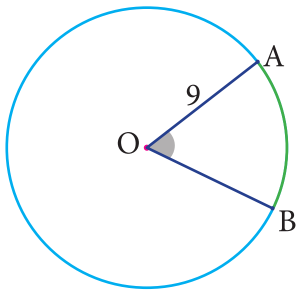
Yandaki O merkezli çemberde

$m(\widehat{ABC}) = x + 20°$

$m(\widehat{AOC}) = 3x - 10°$

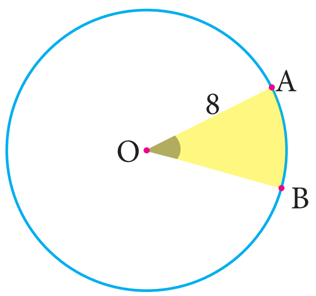
olduğuna göre $m(\overset{\frown}{AC})$ nü bulunuz.

10.



Yandaki yarıçapı 9 cm olan O merkezli çemberde AB yayının uzunluğu 3π cm olduğuna göre $m(\widehat{AOB})$ ölçüsünü bulunuz.

11.



Yandaki yarıçapı 8 cm olan O merkezli çemberde boyalı daire diliminin alanı 8π cm^2 olduğuna göre $|\overset{\frown}{AB}|$ nu bulunuz.

D) 12-43. çoktan seçmeli soruların doğru seçeneklerini işaretleyiniz.

12. Çapı $(4x - 10)$ cm olan bir çemberin merkezinin bir d doğrusuna olan uzaklığı $(10 - x)$ cm dir.

Doğru ile çemberin yalnız bir ortak noktası olduğuna göre çemberin yarıçapı kaç cm dir?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

13. Çapı $(4x - 12)$ cm olan bir çemberin merkezinin bir d doğrusuna olan uzaklığı $(21 - 2x)$ cm dir.

Doğru ile çemberin ortak noktası olmadığı na göre x in alabileceği en büyük tam sayı değeri kaçtır?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

14. Çapı $(6x + 10)$ cm olan bir çemberin merkezinin bir d doğrusuna olan uzaklığı $(16 - x)$ cm dir.

Doğru çemberin bir keseni olduğuna göre x in alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

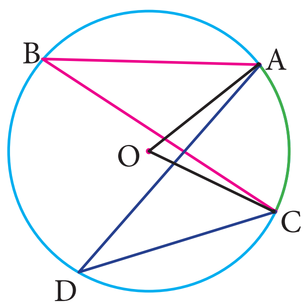
15. Yarıçapı $(2x + 5)$ cm olan bir çemberin merkezinin d, k ve m doğrularına olan uzaklıkları sırasıyla $(3x - 12)$, $(y - 1)$ ve $(4x - 18)$ cm dir. Doğrular ile çemberler arasındaki durumlar aşağıdaki gibidir:

- d doğrusu çemberi iki farklı noktada kesmektedir.
- k doğrusu çembere teğettir.
- m doğrusu ile çemberin ortak noktası yoktur.

Buna göre y nin alabileceği kaç farklı tam sayı değeri vardır?

A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

16.



Yukarıdaki O merkezli çemberde

$m(\widehat{AB}) = 80^\circ$

$m(\widehat{ABC}) = \alpha + 30^\circ$

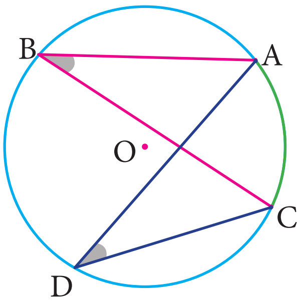
$m(\widehat{ADC}) = \beta - 10^\circ$

$m(\widehat{AOB}) = \theta + 20^\circ$

olduğuna göre $\alpha + \beta + \theta$ toplamı kaç derecedir?

A) 60° B) 80° C) 100° D) 110° E) 120°

17.



Yukarıdaki O merkezli çemberde

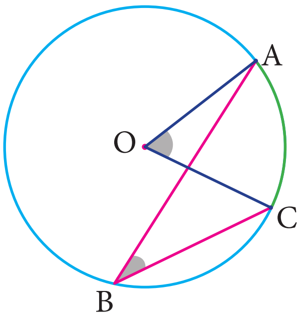
$m(\widehat{ABC}) = 3x - 15°$

$m(\widehat{ADC}) = 57° - x$

dolduğuna göre AC yayının ölçüsü kaç derecedir?

A) 60° B) 68° C) 75° D) 78° E) 80°

18.



Yukarıdaki O merkezli çemberde

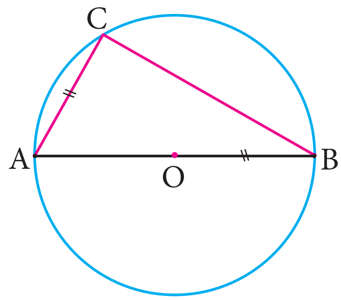
$m(\widehat{AOC}) = 3x - 25°$

$m(\widehat{ABC}) = 60° - x$

dolduğuna göre AC yayının ölçüsü kaç derecedir?

A) 62° B) 68° C) 75° D) 78° E) 80°

19.



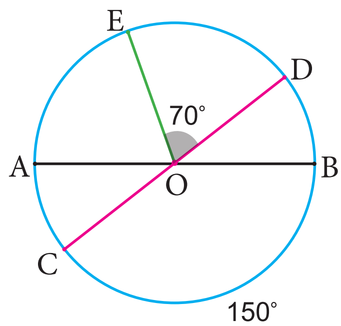
Yukarıdaki O merkezli [AB] çaplı çemberde

$|AC| = |OB|$

olduğuna göre $m(\widehat{ABC})$ kaç derecedir?

A) 15 B) 20 C) 30 D) 45 E) 60

20.



Yukarıdaki O merkezli çemberde

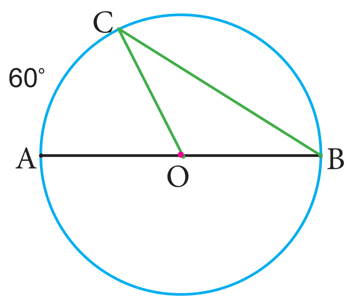
[AB] ve [CD] çap

$m(\widehat{BC}) = 150°$ ve $m(\widehat{EOD}) = 70°$

olduğuna göre $m(\widehat{AE})$ nü bulunuz.

A) 65 B) 70 C) 75 D) 80 E) 90

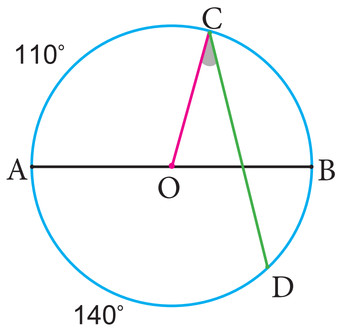
21.



Yukarıdaki O merkezli ve [AB] çaplı çemberde $m(\widehat{AC}) = 60°$ **olduğuna göre $m(\widehat{OCB})$ nü bulunuz.**

A) 15 B) 20 C) 30 D) 45 E) 60

22.



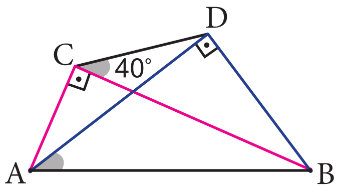
Yandaki O merkezli ve [AB] çaplı çemberde

$m(\widehat{AC}) = 110°$ ve $m(\widehat{AD}) = 140°$

olduğuna göre $m(\widehat{OCD})$ nü bulunuz.

A) 15 B) 20 C) 25 D) 30 E) 25

23.



Yanda ACB ve ADB dik üçgenleri verilmiştir.

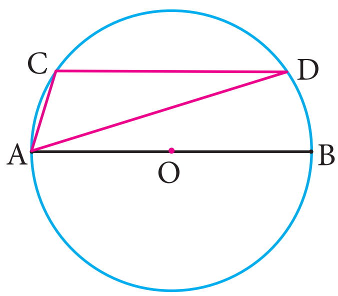
$[AC] \perp [CB]$ ve $[AD] \perp [DB]$

$m(\widehat{BCD}) = 40°$

olduğuna göre $m(\widehat{BAD})$ nü bulunuz.

A) 20 B) 40 C) 45 D) 60 E) 80

24.



Yandaki O merkezli ve [AB] çaplı çemberde

$[CD] \parallel [AB]$ ve $5 \cdot m(\widehat{BAD}) = 2 \cdot m(\widehat{DAC})$

olduğuna göre $m(\widehat{ACD})$ nü bulunuz.

A) 60° B) 80° C) 100°

D) 110° E) 120°

25. Çapı 12 cm olan bir çemberin çevresi kaç cm dir?

A) 4π B) 5π C) 6π

D) 8π E) 12π

26. Çevresi 30π cm olan bir çemberin çapı kaç cm dir?

A) 15 B) 20 C) 30 D) 45 E) 60

27. Çapı 20 cm olan dairenin alanı kaç cm^2 dir?

A) 10π B) 20π C) 50π

D) 80π E) 100π

28. Alanı 36π cm^2 olan bir dairenin çapı kaç cm dir?

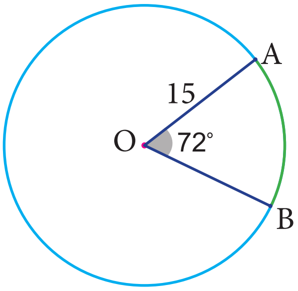
A) 10 B) 12 C) 15 D) 18 E) 24

29. Çevresi 8π cm olan bir dairenin alanı kaç cm^2 dir?

A) 4π B) 8π C) 12π

D) 16π E) 20π

30.

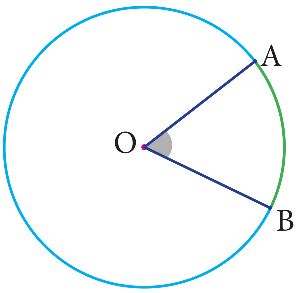


Yukarıdaki yarıçapı 15 cm olan O merkezli çemberde $m(\widehat{AOB}) = 72^\circ$ **olduğuna göre AB yayının uzunluğu kaç cm dir?**

A) 4π B) 5π C) 6π

D) 8π E) 12π

31.

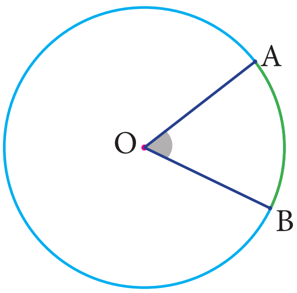


Yukarıdaki çevresi **28π** cm olan O merkezli çemberde AB yayının uzunluğu **7π** cm **olduğuna göre $m(\widehat{AOB})$ kaç derecedir?**

A) 60° B) 90° C) 100°

D) 110° E) 120°

32.

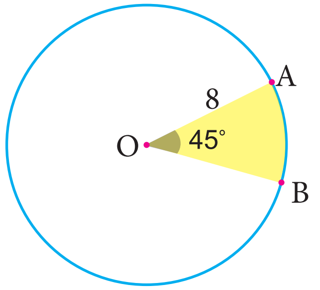


Yukarıdaki O merkezli çemberin çevre uzunluğunun AB yayının uzunluğuna oranı 6 **olduğuna göre $m(\widehat{AOB})$ kaç derecedir?**

A) 60° B) 68° C) 75°

D) 80° E) 90°

33.



Yukarıdaki yarıçapı 8 cm olan O merkezli çemberde

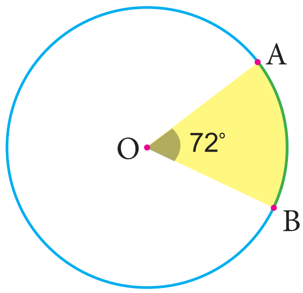
$m(\widehat{AOB}) = 45^\circ$

olduğuna göre boyalı daire diliminin alanı kaç cm^2 dir?

A) 4π B) 5π C) 6π

D) 8π E) 12π

34.



Yukarıdaki O merkezli çemberde

$m(\widehat{AOB}) = 72^\circ$

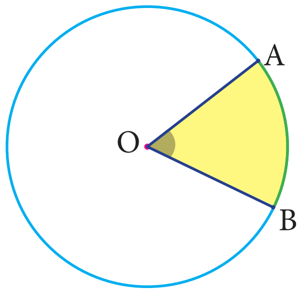
$|\widehat{AB}| = 4\pi$ cm

olduğuna göre boyalı daire diliminin alanı kaç cm^2 dir?

A) 24π B) 20π C) 18π

D) 16π E) 12π

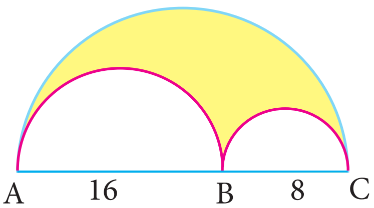
35.



Yukarıdaki çevresi **28π** cm olan O merkezli çemberde AB yayının uzunluğu **7π** cm olduğuna göre **olduğuna göre boyalı daire diliminin alanı kaç cm^2 dir?**

A) 49 B) 56 C) 64 D) 96 E) 192

36.



Yukarıda [AB], [BC] ve [AC] çaplı yarım daireler verilmiştir.

$|AB| = 16$ cm

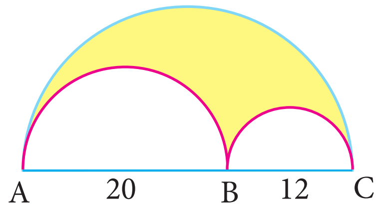
$|BC| = 8$ cm

olduğuna göre boyalı bölgenin alanı kaç cm^2 dir?

A) 36π B) 32π C) 30π

D) 28π E) 24π

37.



Yukarıda [AB], [BC] ve [AC] çaplı yarım daireler verilmiştir.

$|AB| = 20$ cm

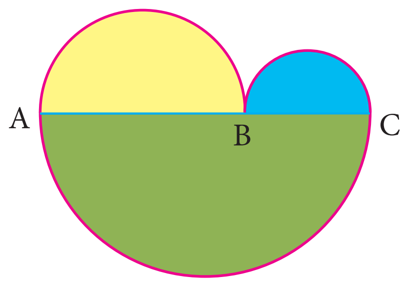
$|BC| = 12$ cm

olduğuna göre boyalı bölgenin çevresi kaç cm dir?

A) 36π B) 32π C) 30π

D) 28π E) 24π

38.

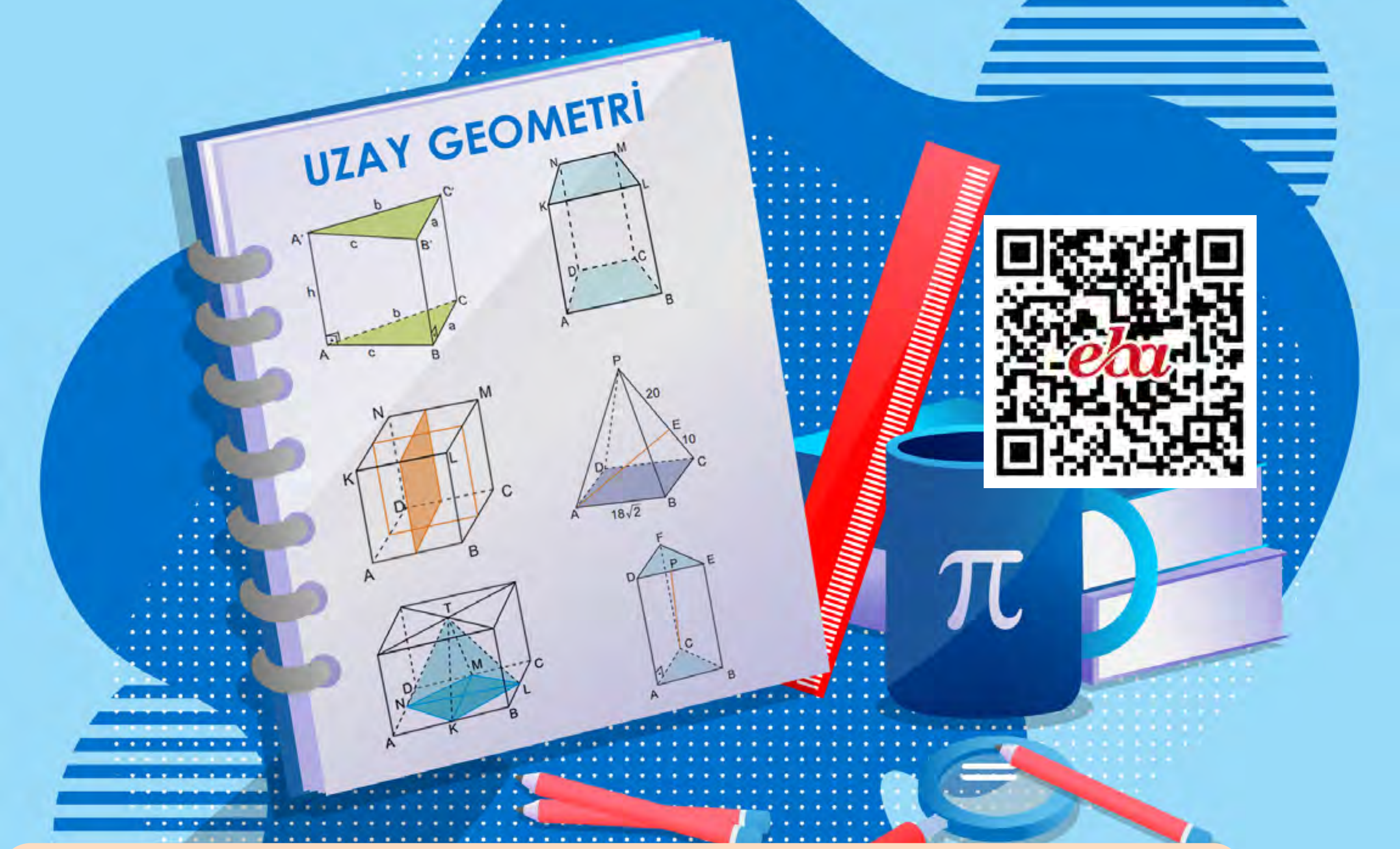


Yukarıda [AB], [BC] ve [AC] çaplı yarım daireler verilmiştir.

Sarı boyalı bölgenin alanı 18 **cm^2** ve mavi boyalı bölgenin alanı 8 **cm^2 olduğuna göre yeşil boyalı bölgenin alanı kaç** cm^2 **dir?**

A) 36π B) 32π C) 30π

D) 25π E) $\frac{25\pi}{2}$



12.4. UZAY GEOMETRİ

KAZANIMLAR

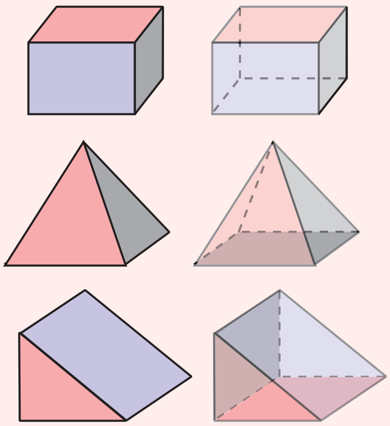
12.4.1. Katı Cisimler

Bu ünitede dik prizma, dik piramit, yükseklik, taban alanı, yüzey alanı, yanal alan, hacim kavramlarını öğreneceksiniz.

HAZIRLIK ÇALIŞMASI

1. Yaşadığımız evrende bir yer kaplayan, belirli bir genişliği, yüksekliği ve derinliği olan her madde bir cisimdir. Bir öğrenci odasında bulunabilecek çalışma masası, sandalye, kalem, silgi, kitap gibi eşyaların birer cisim olduğu ve bu cisimlerin bulunduğu ortamda bir yer kapladığı bilinir. Şekilde görülen çalışma masası dikdörtgenler prizmasına, kalemlik kare prizmaya birer örnektir.

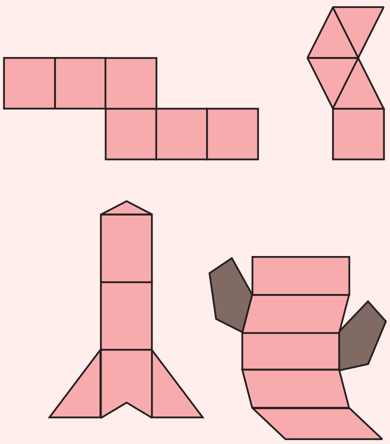
Siz de çevrenizdeki eşyalardan benzer örnekler söyleyiniz.



2. Cisimlerin üç boyutlu olduğunu anlamak için bunları görmek ve bunlara dokunmak gerekir. Fakat cisimler kâğıt yüzeyi gibi iki boyutlu düzlemlerde yer alacaklarında bu cisimlerin üç boyutlu algılanması için dikkat edilecek bazı hususlar bulunmaktadır. Her cismin bir görülen kısmı, bir de görülmeyip arkada kalan kısmı vardır.

a) Kâğıda çizilmiş şekillerin üç boyutlu bir cisme ait olduğu nasıl anlaşılır?

b) Yanda verilen çizimlerin hangileri bir cisme ait olabilir?



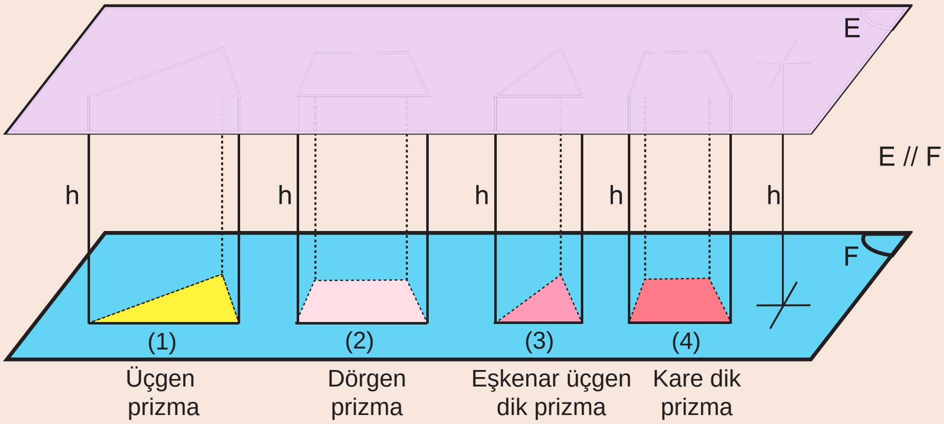
3. Bir cismin açınımına ait şekiller verildiğinde şekiller tekrar çizgilerin bulunduğu yerlerden katlanırsa şeklin hangi cismin açınımı olduğu bulunabilir.
Yanda verilen şekillerden hangileri bir cismin açınımına ait olabilir?

12.4.1. KATI CİSİMLER

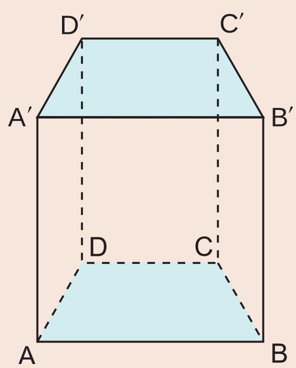
12.4.1.1. Dik Prizmalar ve Dik Piramitlerde Uzunluk, Alan ve Hacim

Dik Prizmalar

Paralel iki düzlem üzerinde bulunan özdeş çokgensel bölgelerin bütün noktalarının karşılıklı olarak paralel doğru parçaları ile birleştirilmesi sonucunda elde edilen doğru parçalarından oluşan kümeye **prizma** denir.

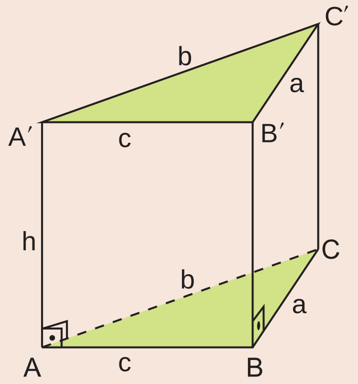


- Şekildeki özdeş çokgensel bölgelerin üzerideki noktalardan geçen E ve F düzlemlerine dik olan doğruların oluşturduğu iki düzlem ile sınırlanan kapalı bölgeye **dik prizma** denir. Dik prizmaların yanal yüzleri daima dikdörtgen olur.
- Prizmalar tabanlarını oluşturan çokgene göre ve dik ya da eğik olmalarına göre adlandırılır. Tabanı üçgen olan dik prizmaya üçgen dik prizma (1), tabanı dörtgen olan dik prizmaya dörtgen dik prizma (2) denir.
- Tabanı düzgün çokgen olan dik prizmalara **düzgün prizma** denir. (3) te gösterilen eşkenar üçgen dik prizma, (4) de gösterilen kare dik prizma düzgün prizmadır.
- Paralel iki düzlem üzerinde bulunan özdeş çokgensel bölgelere **prizmanın tabanları** denir. Yandaki şekilde ABCD dörtgeni prizmanın alt tabanı ve $A'B'C'D'$ dörtgeni ise prizmanın üst tabanıdır.
- Çokgensel bölgelerin kenarlarına prizmanın **taban ayrıtları** denir. Yandaki şekilde $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[AD]$ ve $[A'B']$, $[B'C']$, $[C'D']$, $[A'D']$ prizmanın taban ayrıtlarıdır.
- Tabanların karşılıklı köşelerini birleştiren doğru parçalarına **prizmanın yanal ayrıtları** denir. Yandaki şekilde $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$, $[DD']$ prizmanın yanal ayrıtlarıdır.



- İki yanal ayrıt arasında kalan düzlemsel bölgelere **yanal yüzler** denir. Yukarıdaki şekilde $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CDD'C'$, $ADD'A'$ dörtgenleri prizmanın yanal yüzleridir.
- İki taban arasındaki uzaklığa **prizmanın yüksekliği** denir. Yukarıdaki şekilde $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$, $[DD']$ prizmanın yüksekliğidir.

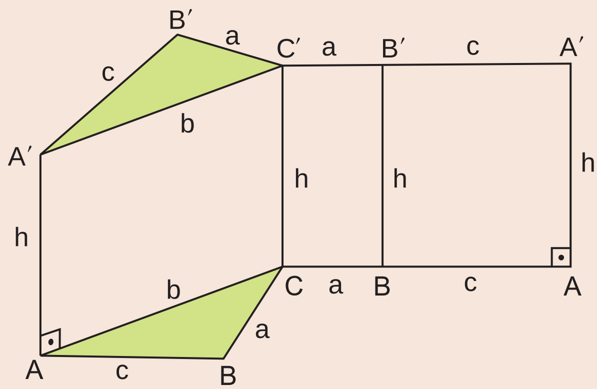
Dik Prizmanın Alanı ve Hacmi



Yanda verilen tabanı dik üçgen olan dik prizmanın açınımı açık olacak şekilde aşağıda verilmiştir.

Üçgen dik prizmada

h : Prizma yüksekliği
V : Prizma hacmi
A : Prizma yüzey alanı
$T_Ç$: Taban çevresi
Y_A : Yanal alanı
T_A : Taban alanı olsun.



Herhangi bir dik prizmanın yanal yüzleri olan dikdörtgenlerin alanları toplamı prizmanın yanal alanına eşittir.

Dikdörtgenin alanı uzun ve kısa kenar uzunlukları çarpımına eşit olduğundan prizmanın yanal alanı $Y_A = a \cdot h + b \cdot h + c \cdot h$

$Y_A = (a + b + c) \cdot h$

$\mathbf{Y_A = T_Ç \cdot h}$ olur.

Buradan dik prizmanın yanal alanının, taban çevresi ile yüksekliğinin çarpımına eşit olduğu görülür.
Bir dik prizmanın yüzey alanı, yanal yüzlerin alanı ile iki tabanının alanları toplamına eşittir.

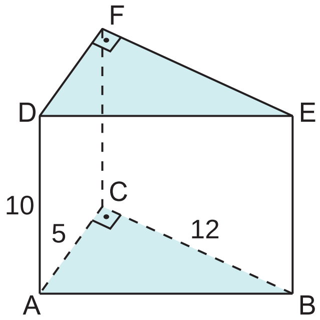
Şekil 4.1.6 da verilen dik prizmanın tabanları dik üçgen olduğundan her bir tabanının alanı $\frac{a \cdot c}{2}$ ve iki tabanının alanları toplamı $a \cdot c$ olur.
Buradan dik prizmanın yüzey alanı $A = (a + b + c) \cdot h + a \cdot c$

$\mathbf{A = Y_A + 2 \cdot T_A}$ olur.

Dik prizmaların hacimleri taban alanı ile yüksekliğinin çarpımına eşittir.

$\mathbf{V = T_A \cdot h}$ olur.

ÖRNEK



Şekildeki dik üçgen dik prizmada

$[AC] \perp [CB]$

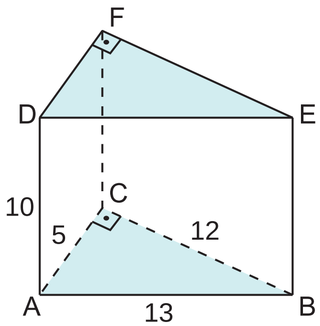
$|AD| = 10$ cm

$|AC| = 5$ cm

$|CB| = 12$ cm

olduğuna göre dik prizmanın yüzey alanının kaç cm^2 ve hacminin kaç cm^3 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



Üçgen dik prizmanın yüzey alanı $A = 2 \cdot T_A + Y_A = 2 \cdot T_A + T_Ç \cdot h$ dir.

Prizmanın tabanı $\widehat{ABC}$ dik üçgen olduğundan

$T_A = \dfrac{5 \cdot 12}{2} = 30\ cm^2$ olur.

ABC dik üçgeninde Pisagor teoreminden $|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$

$|AB|^2 = 5^2 + 12^2 \Rightarrow |AB| = 13$ cm olur.

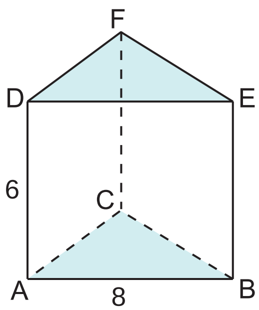
Bu durumda $T_Ç = 5 + 12 + 13 = 30$ cm dir.

Buna göre dik üçgen dik prizmanın yüzey alanı ve hacmi

$A = 2 \cdot T_A + Y_A = 2 \cdot T_A + T_Ç \cdot h == 2 \cdot 30 + 30 \cdot 10 = 360\ cm^2$ ve

$V = T_A \cdot h = 30 \cdot 10 = 300\ cm^3$ bulunur.

ÖRNEK



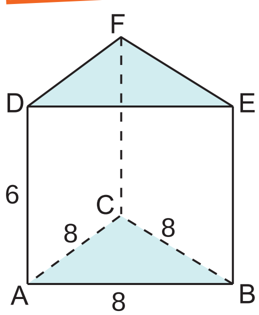
Şekildeki eşkenar üçgen dik prizmada

$|AB| = 8$ cm

$|AD| = 6$ cm

olduğuna göre bu prizmanın yüzey alanının kaç cm^2 ve hacminin kaç cm^3 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



Eşkenar üçgen dik prizmanın yüzey alanı $A = 2 \cdot T_A + Y_A = 2 \cdot T_A + T_Ç \cdot h$ dir.

Prizmanın tabanı $\widehat{ABC}$ eşkenar üçgen olduğundan taban alanı $\dfrac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$ olur.

$|AB| = a = 8$ cm olduğundan

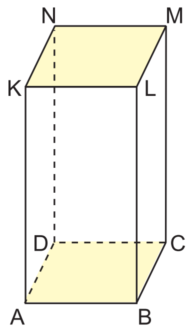
$T_A = \dfrac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \dfrac{8^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \dfrac{64 \cdot \sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}\ cm^2$ ve $T_Ç = 3 \cdot a = 3 \cdot 8 = 24$ cm olur.

Buna göre eşkenar üçgen dik prizmanın yüzey alanı ve hacmi

$A = 2 \cdot T_A + Y_A = 2 \cdot T_A + T_Ç \cdot h = 2 \cdot 16\sqrt{3} + 24 \cdot 6 = 32\sqrt{3} + 144\ cm^2$ ve

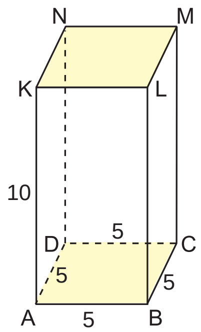
$V = T_A \cdot h = 16\sqrt{3} \cdot 6 = 96\sqrt{3}\ cm^3$ bulunur.

ÖRNEK



Şekildeki kare dik prizmanın taban alanı $25\ cm^2$ dir.
$|AK| = 10\ cm$
olduğuna göre bu prizmanın yanal alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



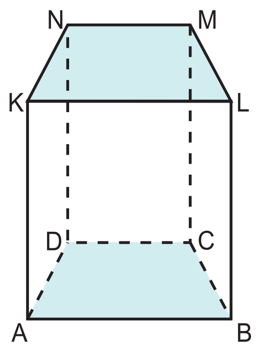
Bir kenar uzunluğu a cm olan karenin alanı $a^2\ cm^2$ dir.
Şekildeki dik prizmanın tabanı olan ABCD karesinin alanı $25\ cm^2$ olduğundan prizmanın tabanının bir kenar uzunluğu

$T_A = a^2 = 25 \Rightarrow a = 5\ cm$ olur.

Bu durumda $T_Ç = 4 \cdot a = 4 \cdot 5 = 20\ cm$ olduğundan

$Y_A = T_Ç \cdot h = 20 \cdot 10 = 200\ cm^2$ bulunur.

ÖRNEK



Şekildeki ikizkenar yamuk dik prizmada

$m(\widehat{BAD}) = 60^\circ$

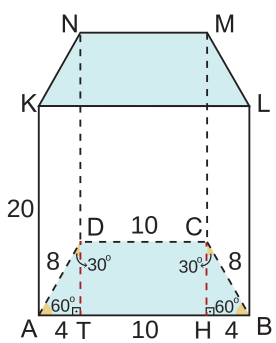
$|AD| = |BC| = 8\ cm$

$|AB| = 18\ cm$

$|AK| = 20\ cm$

olduğuna göre bu prizmanın yanal alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



Şekildeki ABCD ikizkenar yamuğunda C ve D noktalarından AB kenarına $[DT]$ ve $[CH]$ yükseklikleri çizilirse THCD dikdörtgeni elde edilir.

$|DC| = |TH|$ ve $|AT| = |HB|$ olur.

İkizkenar yamuk dik prizmada $m(\widehat{BAD}) = 60^\circ$ olduğundan $\widehat{ATD}$ ve $\widehat{BHC}$ $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ üçgeni olur.

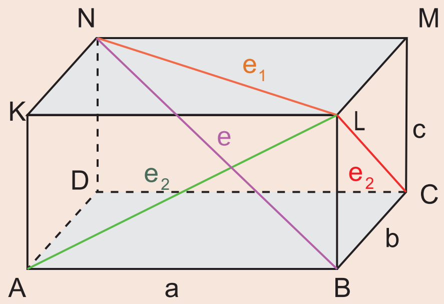
Bu durumda ATD ve BHC dik üçgeninde $|AD| = |BC| = 8\ cm$ olduğundan $|AT| = |HB| = 4\ cm$ olur.

$|AB| = 18\ cm$ ve $|AT| = |HB| = 4\ cm$ olduğundan $|TH| = |DC| = 10\ cm$ olur.

Prizmanın yanal alanı

$Y_A = T_Ç \cdot h = (18 + 8 + 10 + 8) \cdot 20 = 44 \cdot 20 = 880\ cm^2$ bulunur.

Dikdörtgenler Prizması



Bütün yüzleri dikdörtgen olan dik prizmaya **dikdörtgenler prizması** denir.

Dikdörtgenler prizmasında aynı köşeden çıkan üç ayrıta bu dikdörtgenler prizmasının **boyutları** denir. Bu ayrıtların uzunlukları a, b, c ile gösterilir.

Dikdörtgenler prizmasında aynı yüzeyde karşılıklı iki köşeyi birleştiren doğru parçasına **yüzey köşegeni** denir.

▶ Yüzey köşegenleri e_1, e_2 ve e_3 ile gösterilir ve uzunlukları

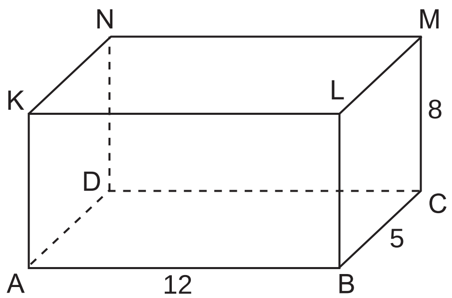
$\mathbf{e_1 = \sqrt{a^2 + b^2}, e_2 = \sqrt{a^2 + c^2}, e_3 = \sqrt{b^2 + c^2}}$ eşitlikleriyle bulunur.

▶ Dikdörtgenler prizmasında cisim köşegeni e ile gösterilir ve uzunluğu $\mathbf{e = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ eşitliğiyle bulunur.

▶ Dikdörtgenler prizmasında $A = 2 \cdot Y_A + T_A$ eşitliğinde $Y_A = T_Ç \cdot h$ olduğundan
$A = 2 \cdot a \cdot b + 2(a + b) \cdot c$ eşitliği düzenlenirse
$A = 2ab + 2ac + 2bc \Rightarrow \mathbf{A = 2 \cdot (ab + ac + bc)}$ elde edilir.

▶ Dikdörtgenler prizmasında $V = T_A \cdot h$ olduğundan $\mathbf{V = a \cdot b \cdot c}$ elde edilir.

ÖRNEK



Şekildeki dikdörtgenler prizmasında
$|AB| = 12$ cm
$|BC| = 5$ cm
$|CM| = 8$ cm
olduğuna göre prizmanın yüzey alanını, hacmini, yüzey köşegen uzunluklarını ve cisim köşegen uzunluğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Prizmanın ayrıtları $a = |AB| = 12$ cm, $b = |BC| = 5$ cm ve $c = |CM| = 8$ cm olarak alınırsa
Yüzey alanı

$A = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c) = 2 \cdot (12 \cdot 5 + 12 \cdot 8 + 5 \cdot 8) = 392\ cm^2$ bulunur.

Hacmi

$V = a \cdot b \cdot c = 12 \cdot 5 \cdot 8 = 480\ cm^3$ bulunur.

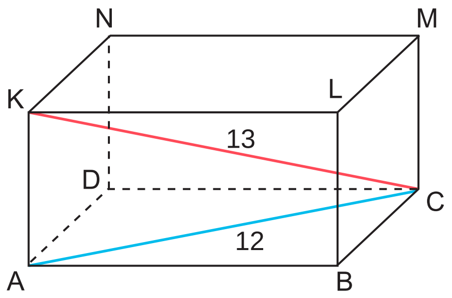
Yüzey köşegenlerinin uzunlukları

$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 \Rightarrow |AC|^2 = 12^2 + 5^2 \Rightarrow e_1 = |AC| = 13$ cm
$|BM|^2 = |BC|^2 + |CM|^2 \Rightarrow |BM|^2 = 5^2 + 8^2 \Rightarrow e_2 = |BM| = \sqrt{89}$ cm
$|AL|^2 = |AB|^2 + |BL|^2 \Rightarrow |AL|^2 = 12^2 + 8^2 \Rightarrow e_3 = |AL| = 4\sqrt{13}$ cm bulunur.

Cisim köşegen uzunluğu

$e = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{12^2 + 5^2 + 8^2} = \sqrt{144 + 25 + 64} = \sqrt{233}$ cm bulunur.

ÖRNEK



Şekildeki dikdörtgenler prizmasında
$|KC| = 13$ cm
$|AC| = 12$ cm
$A(ABCD) = 8\ cm^2$
olduğuna göre dikdörtgenler prizmasının hacminin kaç cm^3 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Dikdörtgenler prizmasında $m(\widehat{KAC}) = 90°$ olduğundan $\widehat{KAC}$ dik üçgen olur.
Pisagor teoreminden

$|KA|^2 + |AC|^2 = |KC|^2 \Rightarrow |KA|^2 + 12^2 = 13^2 \Rightarrow |KA|^2 = 169 - 144 = 25 \Rightarrow |KA| = h = 5$ cm olur.

$V = T_A \cdot h = A(ABCD) \cdot h = 8 \cdot 5 = 40\ cm^3$ bulunur.

ÖRNEK

Bir dikdörtgenler prizmasının farklı üç yüzünün alanları $5\ cm^2$, $8\ cm^2$ ve $10\ cm^2$ dir. Bu dikdörtgenler prizmasının hacminin kaç cm^3 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Dikdörtgenler prizmasının ayrıt uzunlukları a, b, c olsun. Bu durumda farklı yüzlerin alanları

$a \cdot b = 5\ cm^2$

$a \cdot c = 8\ cm^2$

$b \cdot c = 10\ cm^2$ olur.

$V = a \cdot b \cdot c$ eşitinin bulunabilmesi için eşitlikler taraf tarafa çarpılırsa

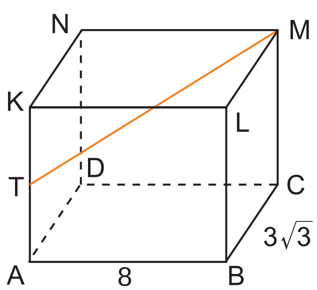
$(a \cdot b) \cdot (a \cdot c) \cdot (b \cdot c) = 5 \cdot 8 \cdot 10$

$\Rightarrow a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = 400$

$\Rightarrow \sqrt{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2} = \sqrt{400}$

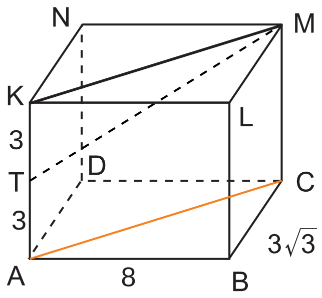
$\Rightarrow a \cdot b \cdot c = 20\ cm^3$ bulunur.

ÖRNEK



Şekildeki dik prizmada
T noktası [AK] nın orta noktası
$|AB| = 8$ cm
$|AK| = 6$ cm
$|BC| = 3\sqrt{3}$ cm
olduğuna göre TM uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



Şekildeki dikdörtgenler prizmasında $[KM]$ ve $[AC]$ çizilir. $[TM]$, ACMK dikdörtgeni içinde kalan TKM dik üçgeninin hipotenüsüdür.

ABC dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa

$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$

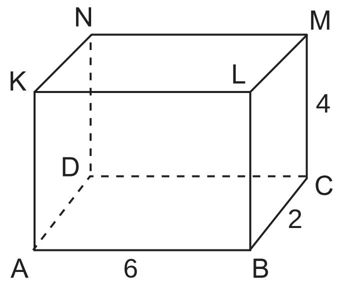
$|AC|^2 = 8^2 + (3\sqrt{3})^2 = 91$ olur.

$|AC| = |KM|$ olduğundan TKM dik üçgeninde Pisagor teoreminden

$|TM|^2 = |KM|^2 + |TK|^2 = 91 + 9$

$|TM|^2 = 100 \Rightarrow |TM| = 10$ cm bulunur.

ÖRNEK



Şekildeki dikdörtgenler prizmasının ayrıtlarının uzunlukları

$|AB| = 6$ cm

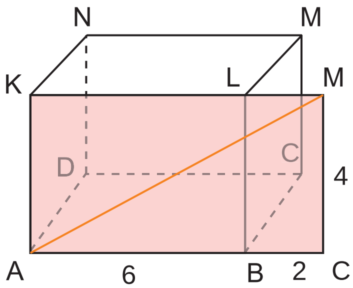
$|BC| = 2$ cm

$|MC| = 4$ cm

olduğuna göre bu prizmanın A köşesinden M köşesine prizma yüzeyinden giden bir karıncanın aldığı en kısa yolun uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Dikdörtgenler prizmasının BCML yüzü açılarak ACMK dikdörtgeni elde edilir.

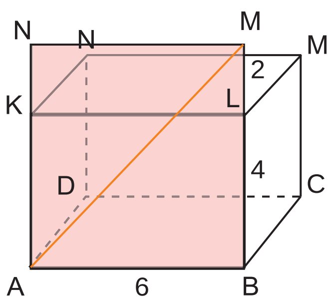


ACM dik üçgeninde Pisagor teoreminden

$|MA|^2 = 8^2 + 4^2 = 64 + 16 = 80$

$|MA| = 4\sqrt{5}$ cm olur.

Dikdörtgenler prizmasının KLMN yüzü açılarak ABMN dikdörtgeni elde edilir.



ABM dik üçgeninde Pisagor teoreminden

$|MA|^2 = 6^2 + 6^2 = 36 + 36 = 72$

$|MA| = 6\sqrt{2}$ cm olur.

Bu durumda prizmanın A köşesinden M köşesine giden karıncanın aldığı en kısa yol $6\sqrt{2}$ cm bulunur.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki cümlelerde boş bırakılan yerleri uygun sözcüklerle tamamlayınız.

I. Paralel iki düzlem üzerinde bulunan özdeş çokgensel bölgelere .... denir.

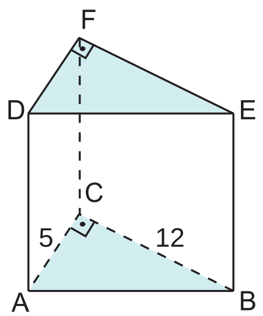
II. Dik prizmaların yanal yüzleri daima .... olur.

III. Bir dik prizmanın yüzey alanı, yanal yüzlerin alanı ile iki tabanının alanları .... eşittir.

IV. İki taban arasındaki uzaklığa .... denir.

V. Herhangi bir dik prizmanın yanal yüzleri olan dikdörtgenlerin alanları toplamı prizmanın .... eşittir.

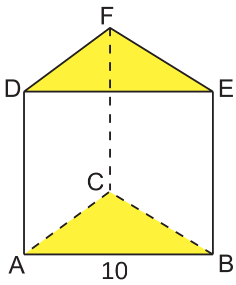
2.



Dik üçgen dik prizmada
ABED kare
$[AC] \perp [CB]$
$|AC| = 5$ cm
$|CB| = 12$ cm
olduğuna göre bu prizmanın yanal alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

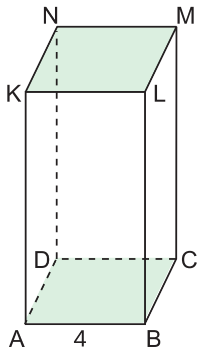
3. Tabanı eşkenar üçgen olan dik prizmanın tabanının bir kenar uzunluğu 5 cm, yüksekliği 12 cm dir. Bu prizmanın yanal alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

4.



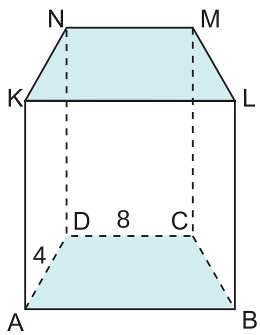
Eşkenar üçgen dik prizmanın hacmi $300\ cm^2$ dir. $|AB| = 10$ cm olduğuna göre bu prizmanın yüksekliğinin kaç cm olduğunu bulunuz.

5.



Kare dik prizmanın yüzey alanı $160\ cm^2$ dir. $|AB| = 4$ cm olduğuna göre kare dik prizmanın hacminin kaç cm^3 olduğunu bulunuz.

6.

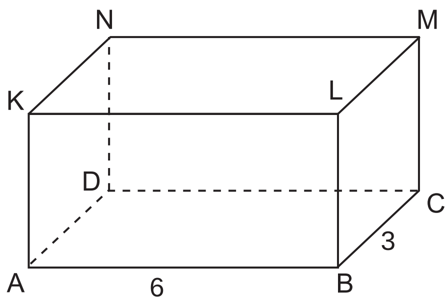


İkizkenar yamuk dik prizmasının hacmi $168\ cm^2$ dir.

$m(\widehat{ABC}) = 60^\circ$

$|AD| = 4$ cm ve $|CD| = 8$ cm olduğuna göre bu prizmanın yüksekliğinin kaç cm olduğunu bulunuz.

7.



Dikdörtgenler prizmasının yanal alanı $36 \ cm^2$ dir.

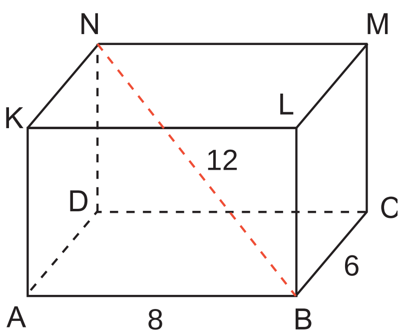
$|AB| = 6 \ cm$

$|BC| = 3 \ cm$

olduğuna göre bu prizmanın cisim köşegen uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

8. Hacmi $288 \ cm^3$ olan dikdörtgenler prizmasının boyutları 2, 3 ve 6 sayıları ile orantılıdır. Buna göre bu prizmanın <u>en küçük</u> yüzünün alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

9.



Dikdörtgenler prizmasında

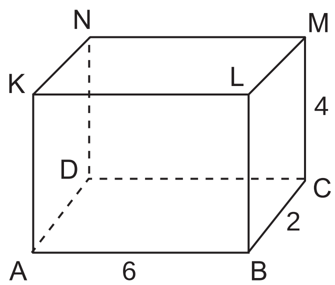
$|AB| = 8 \ cm$

$|BC| = 6 \ cm$

$|BN| = 12 \ cm$

olduğuna göre $[ND]$ nın uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

10.



Dikdörtgenler prizmasında

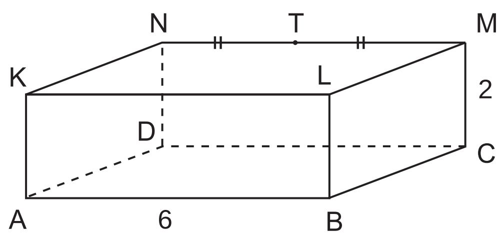
$|AB| = 2 \ cm$

$|BC| = 2 \ cm$

$|MC| = 4 \ cm$

olduğuna göre bu prizmanın A köşesinden M köşesine prizma yüzeyinden giden bir karıncanın aldığı <u>en kısa</u> yolun uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

11.



Dikdörtgenler prizmasında T noktası $[MN]$ nın orta noktasıdır.

$|AB| = 6 \ cm$

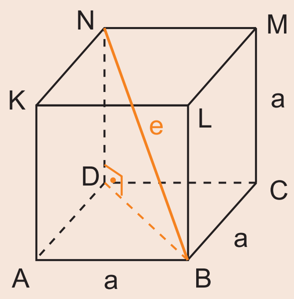
$|BC| = 2\sqrt{3} \ cm$

$|MC| = 2 \ cm$

olduğuna göre A noktasından başlayarak prizmanın yüzeyi üzerinden T noktasına gidecek olan bir hareketlinin <u>en az</u> kaç cm yol alacağını bulunuz.

12. Bir dikdörtgenler prizmasının ayrıtları olan a, b ve c arasında $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{2}{7}$ eşitliği vardır. Prizmanın hacmi $161 \ cm^3$ olduğuna göre alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

Küp



Bütün ayrıtlarının uzunlukları eşit olan dikdörtgenler prizmasına **küp** denir.

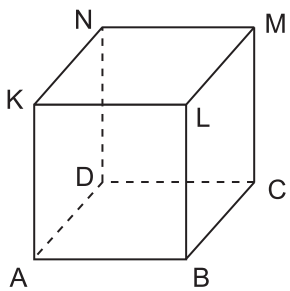
▶ Küpün tüm yüzleri kare olduğundan herhangi bir karesinin köşegeni yüzey köşegenidir ve küpün yüzey köşegeni $a \cdot \sqrt{2}$ olur.

▶ Cisim köşegeninin uzunluğu $e = a \cdot \sqrt{3}$ olur.

▶ Küpün yüzey alanı 6 eş karenin alanları toplamı olduğundan küpün yüzey alanı $\mathbf{A = 6 \cdot a^2}$ olur.

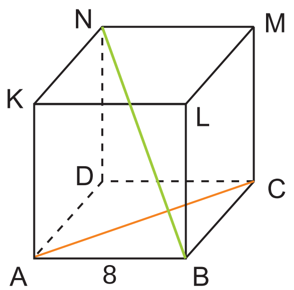
▶ Küpün hacmi $V = T_A \cdot h = a^2 \cdot a = \mathbf{a^3}$ olur.

ÖRNEK



Şekildeki ayrıt uzunluğu 8 cm olan küpün
Yüzey ve cisim köşegen uzunluğunun kaç cm olduğunu
Yüzey alanının kaç cm^2 olduğunu
Hacminin kaç cm^3 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



Küpün bütün ayrıt uzunlukları eşit olduğundan $a = 8$ alınırsa
Küpün yüzey köşegeni $|AC| = a \cdot \sqrt{2} = 8\sqrt{2}$ cm ve cisim köşegeni
$|BN| = a \cdot \sqrt{3} = 8\sqrt{3}$ cm bulunur.

Küpün yüzey alanı

$A = 6 \cdot a^2 = 6 \cdot 8^2 = 6 \cdot 64 = 384 \ cm^2$ bulunur.

Küpün hacmi

$V = a^3 = 8^3 = 512 \ cm^3$ bulunur.

ÖRNEK

Bir küpün hacmi $V \ cm^3$, alanı $A \ cm^2$ ve $\frac{V}{A} = \frac{2}{3}$ olduğuna göre küpün yüzey köşegeninin kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Küpün ayrıt uzunluğu a cm olduğundan $V = a^3$ ve $A = 6 \cdot a^2$ olur.

$$\frac{V}{A} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{a^3}{6a^2} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{a}{6} = \frac{2}{3}$$

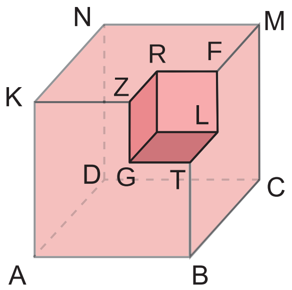
$$\Rightarrow 3 \cdot a = 6 \cdot 2$$

$$\Rightarrow \frac{3 \cdot a}{3} = \frac{12}{3}$$

$$\Rightarrow a = 4 \text{ olur.}$$

Bu durumda küpün yüzey köşegeni uzunluğu $a\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ cm bulunur.

ÖRNEK



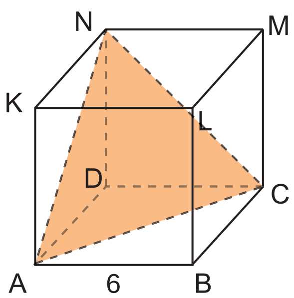
Şekildeki bir ayrıt uzunluğu 8 cm olan küpün köşesinden küçük bir küp kesilerek çıkarılmıştır.
$|TB| = 5$ cm
olduğuna göre kalan cismin hacminin kaç cm^3 olduğunu bulunuz.,

ÇÖZÜM

Bir ayrıt uzunluğu 8 cm olan büyük küpün hacmi
$V = 8^3 = 512\ cm^3$ olur.
Büyük küpün bir ayrıt uzunluğu 8 cm ve $|TB| = 5$ cm olduğundan kesilen küpün bir ayrıt uzunluğu 3 cm dir. Bu durumda kesilen küpün hacmi
$V = 3^3 = 27\ cm^3$ olur.
Kalan Cismin Hacmi = (Büyük Küpün Hacmi) – (Kesilen Küpün Hacmi)
olduğundan

$$\begin{aligned}\text{Kalan Cismin Hacmi} &= 8^3 - 3^3\\ &= 512 - 27\\ &= 485\ cm^3 \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

ÖRNEK



Şekildeki küpte boyalı ACN üçgeninin kenarları şekilde verilen küpe ait yüzey köşegenleridir.
$|AB| = 6$ cm olduğuna göre
ACN üçgeninin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$[AC]$, $[CN]$ ve $[AN]$ yüzey köşegeni ve $|AC| = |CN| = |AN|$ olduğundan ACN üçgeni eşkenar üçgendir.
Küpün ayrıt uzunluğu 6 cm olduğundan $|AC| = |CN| = |NA| = 6\sqrt{2}$ cm olur.

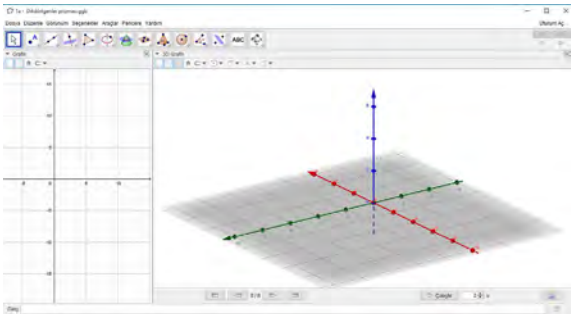
Bir kenar uzunluğu a cm olan eşkenar üçgenin alanı $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ olduğundan bir kenar uzunluğu $6\sqrt{2}$ cm olan ACN eşkenar üçgeninin alanı

$$\begin{aligned}\frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} &= \frac{(6\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{4}\\ &= \frac{72\sqrt{3}}{4}\\ &= 18\sqrt{3}\ cm^2 \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

Bilgi ve İletişim Teknolojilerinden Yararlanarak Geometrik Şekilleri Çizme

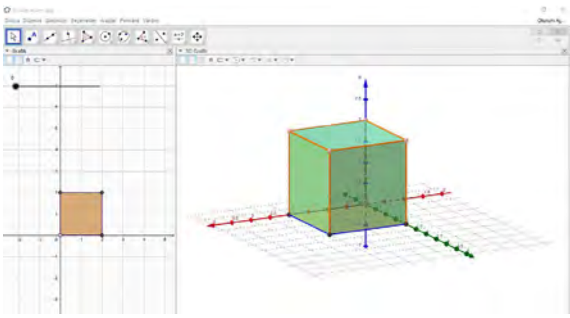
Küp Çizimi

Dinamik matematik yazılımı çalıştırılır. Açılan pencerede geometri seçilir, görünümden 3D grafik penceresi tercih edilir.



Araç çubuğunda piramit tıklanır ve küp seçilir.

Çizilmek istenen (cisim) küp için bir kenar uzunluğuna eşit olacak biçimde orijinden başlanarak iki nokta işaretlenir veya kenar uzunluğuna eşit uzaklıkta iki nokta işaretlenir. İstenilen küp çizilmiş olur.

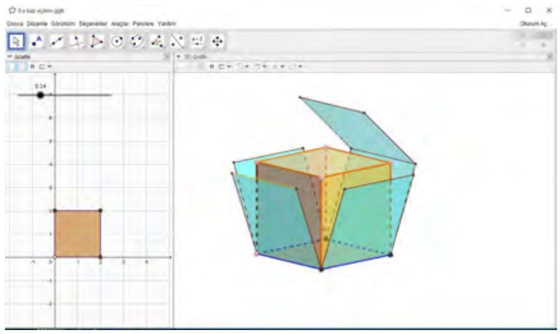


Araç çubuğundan zemin çizgileri ve eksen kutuları tıklanarak çokgen, temiz bir sayfaya taşınacak duruma getirilir. Dosya kutusuna tıklanır ve çıkart sekmesi seçilerek çizim tahtasından panoya aktar komutu işaretlenir. Şekil kelime işlemci programına ya da istenilen bir çalışma sayfasına yapıştırılır.

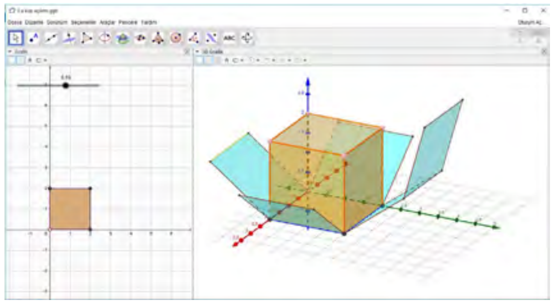
Aynı işlemleri tekrarlayarak istediğiniz cisimleri çizebilirsiniz.

Küp Açılımı

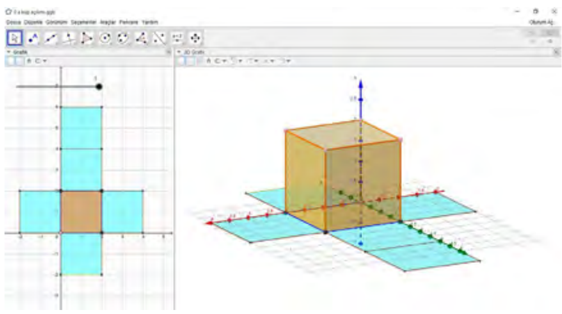
Küpün yüzlerini açmak için küp çizimi tamamlandıktan sonra araç çubuğundaki yüzleri açılmış piramit üzerine tıklanır gelen komut sekmesinde en altta bulunan **"düzleme aç"** seçilir. Sonra çizilen küp üzerine tıklanır.



Küpün düzleme açılmış biçimi ile bir sürgü ekranda görülür.



Sürgü üzerine sağ tık yapıldığında açılan komut sekmesinde **canlandırılıyor** seçilirse cismin yüzleri otomatik olarak düzleme açılma ve kapanma hareketleri yapar. Durdurmak için tekrar **canlandır** sekmesine tıklanır.



ALIŞTIRMALAR

1. Ayrıt uzunluğu 5 cm olan küpün

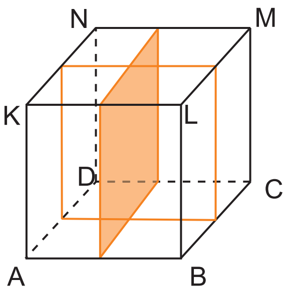
a) Yüzey ve cisim köşegen uzunluğunun kaç cm olduğunu

b) Yüzey alanının kaç cm^2 olduğunu

c) Hacminin kaç cm^3 olduğunu bulunuz.

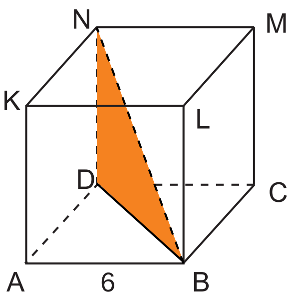
2. Bir kenarının uzunluğu 12 cm olan bir küpün içine bir kenarının uzunluğu 3 cm olan küplerden kaç tane yerleştirilebileceğini bulunuz.

3.



Bir kenar uzunluğu 4 cm olan küp şeklindeki tahta parçası dört eş kare prizmaya bölünmüştür. Oluşan kare dik prizmaların alanlarının toplamının küpün alanından kaç cm^2 fazla olduğunu bulunuz.

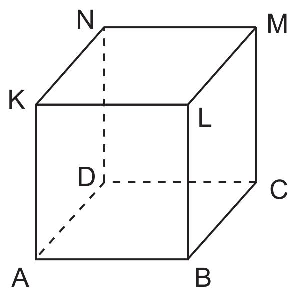
4.



Şekildeki küpte
$|AB| = 6$ cm olduğuna göre
BDN üçgeninin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

5. Bir kenar uzunluğu 6 cm olan küp şeklindeki tahta parçasının bir köşesinden bir kenar uzunluğu 3 cm olan bir küp kesilerek çıkarılmıştır. Kalan cismin hacminin kaç cm^3 olduğunu bulunuz.

6.



Şekildeki küpte çizilen ALMD dikdörtgeninin alanı $12\sqrt{2}$ cm^2 olduğuna göre küpün yüzey alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

7.

Boyutları 10 cm, 20 cm ve 40 cm olan dikdörtgenler prizması şeklindeki kolilerin içine, bir ayrıt uzunluğu 5 cm olan küp şeklindeki süt kutuları yerleştirilerek kutular bir kamyonet ile taşınacaktır. Kamyonetin kasası dikdörtgenler prizması şeklinde olup boyutları 3 m, 1 m ve 4 m olduğuna göre

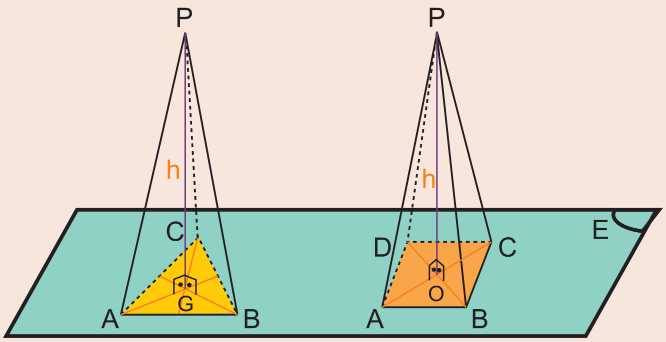
a) Bir koli içine kaç tane süt kutusu yerleştirilebileceğini bulunuz.

b) Kamyonetin kasasına <u>en fazla</u> kaç tane koli koyulabileceğini bulunuz.

c) Kamyonetin bir seferde <u>en fazla</u> kaç litre süt taşıyabileceğini bulunuz.
(1 litre $= 1000$ cm^3).

Piramit

Düzlem dışında bulunan bir P noktası ile düzlem içindeki bir çokgensel bölgenin bütün noktaları doğru parçaları ile birleştirildiğinde elde edilen doğru parçalarının birleşim kümesine **piramit** denir.

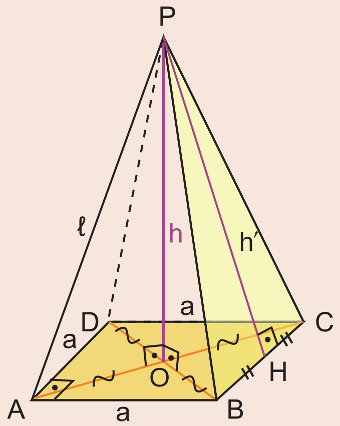


(1) Üçgen dik piramit

(2) Kare dik piramit

- Düzlem dışındaki P noktasına piramidin tepe noktası, düzlem içinde bulunan çokgensel bölgeye **piramidin tabanı** denir.
- Piramitlerin yanal yüzleri üçgenlerden meydana gelir.
- Piramitler tabanlarına göre ve dik ya da eğik olmalarına göre adlandırılır.
- Tepe noktası ile tabanın ağırlık merkezinden geçen doğru, taban düzlemine dik ise piramide **dik piramit** denir.
- E düzlemi içinde bulunan çokgensel bölgenin kenarlarına piramidin **taban ayrıtları**, tepe noktasını tabanın köşeleri ile birleştiren doğru parçalarına **piramidin yanal ayrıtları** denir.
- (1) üçgen dik piramitte [AB], [BC], [AC] piramidin taban ayrıtları ve [PA], [PB], [PC] piramidin yanal ayrıtlarıdır. (2) dörtgen dik piramitte ise [AB], [BC], [CD], [AD] piramidin taban ayrıtları ve [PA], [PB], [PC], [PD] piramidin yanal ayrıtlarıdır.
- Tabanı düzgün çokgen olan dik piramitlere **düzgün piramit** denir.
- Düzgün piramitlerin yanal yüzleri eş ikizkenar üçgenlerden meydana gelir.
- Tepe noktasından tabana çizilen dik doğru parçasının uzunluğuna **piramidin yüksekliği** denir.
- Piramitler tepe noktası ve tabandaki çokgenin köşe noktaları kullanılarak isimlendirilir. Tabanı ABC üçgeni ve tepe noktası P olan piramit (1), tabanı ABCD dörtgeni ve tepe noktası P olan bir piramit (2) şeklinde gösterilir.

Düzgün Dik Piramidin Alanı ve Hacmi



Yanda şekilde verilen düzgün dik piramitte

$h = |PO|$: Piramit yüksekliği

$h' = |PH|$: Piramidin yan yüz yüksekliği

a : Piramidin taban ayrıtı

ℓ : Piramidin yanal ayrıtları

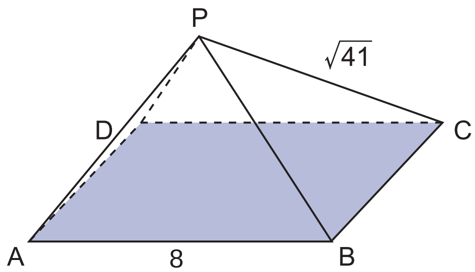
P : Piramidin tepe noktası olsun. Bu durumda

Piramidin alanı $A = T_A + Y_A$

Piramidin yanal alanı $Y_A = \dfrac{T_Ç \cdot h'}{2}$

Piramidin hacmi $V = \dfrac{T_A \cdot h}{3}$ olur.

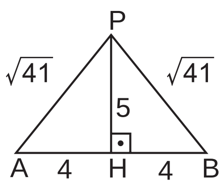
ÖRNEK



Şekildeki düzgün kare dik piramitte
$|AB| = 8$ cm
$|PC| = \sqrt{41}$ cm
olduğuna göre düzgün piramidin yüzey alanının kaç cm^2 ve hacminin kaç cm^3 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Düzgün kare dik piramidin yan yüzü birbirine eş dört ikizkenar üçgenden oluşur.



ABP ikizkenar üçgeninde P tepe noktasından AB kenarına çizilen yan yüz yüksekliği AB kenarına ait kenarortay olduğundan $|AH| = |HB| = 4$ cm olur. ABP ikizkenar üçgeninde $[PH]$ yan yüz yüksekliği çizildiğinde PHA dik üçgen olur. PHA dik üçgeninde Pisagor teoreminden

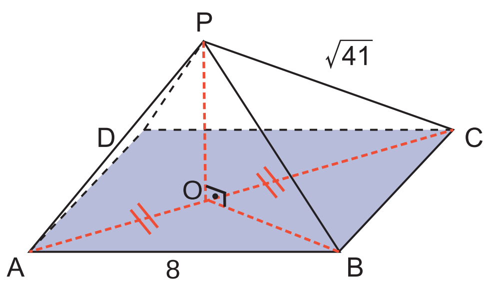
$|PA|^2 = |PH|^2 + |HA|^2 \Rightarrow (\sqrt{41})^2 = |PH|^2 + 4^2$

$|PH|^2 = 41 - 16 = 25 \Rightarrow |PH| = h' = 5$ cm olur.

Piramidin yanal alanı $Y_A = \dfrac{T_Ç \cdot h'}{2} = \dfrac{(4 \cdot 8) \cdot 5}{2} = \dfrac{160}{2} = 80 \text{ cm}^2$ olur.

Piramidin taban alanı $T_A = 8 \cdot 8 = 64 \text{ cm}^2$ olur.

Bu durumda piramidin yüzey alanı $A = T_A + Y_A = 64 + 80 = 144 \text{ cm}^2$ bulunur.



Düzgün piramidin tabanı kare olduğundan $[AC]$ köşegeni çizildiğinde ABC dik üçgeninde Pisagor teoreminden $|AC| = 8\sqrt{2}$ cm olur. $[AC] \perp [PO]$ olacak şekilde $[PO]$ çizilirse $\widehat{POC}$ dik üçgen olur.

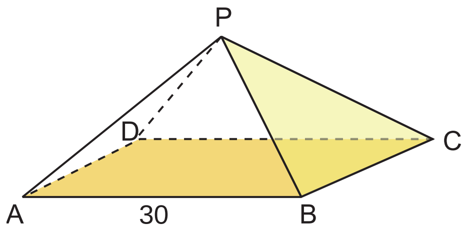
Pisagor teoreminden $|PC|^2 = |PO|^2 + |OC|^2$ eşitliğiyle

$(\sqrt{41})^2 = |PO|^2 + (4\sqrt{2})^2 \Rightarrow |PO|^2 = 41 - 32 = 9$

$\Rightarrow |PO| = h = 3$ cm olur ve

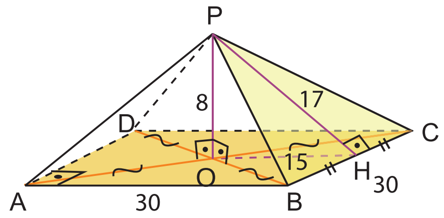
piramidin hacmi $V = \dfrac{T_A \cdot h}{3} = \dfrac{64 \cdot 3}{3} = 64 \text{ cm}^3$ bulunur.

ÖRNEK



Şekilde tabanının bir ayrıt uzunluğu 30 cm, yüksekliği 8 cm olan bir düzgün kare piramit verilmiştir.
Buna göre PBC üçgeninin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



Şekilde düzgün kare piramidin yüksekliği $h = |PO| = 8$ cm ve $[OH] \parallel [AB] \parallel [DC]$ çizilirse POH dik üçgeni oluşur.

$\widehat{COH} \sim \widehat{CAB}$ ile $|OH| = 15$ cm olur.

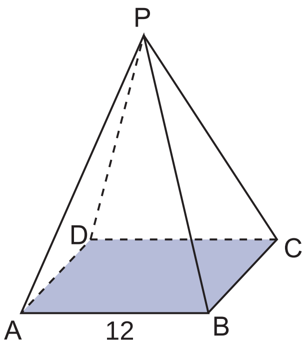
POH dik üçgeninde Pisagor teoreminden

$|PH|^2 = |PO|^2 + |OH|^2 = 8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289$ olur.

Buradan $|PH| = 17$ cm olur. Bu durumda

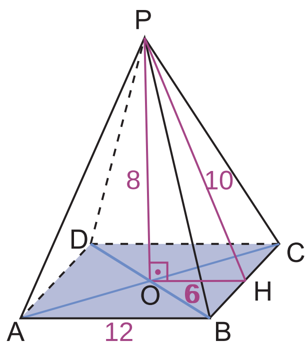
$A(\widehat{PBC}) = \frac{1}{2} \cdot |PH| \cdot |BC| = \frac{1}{2} \cdot 17 \cdot 30 = 255\ cm^2$ bulunur.

ÖRNEK



Şekildeki yüksekliği 8 cm olan düzgün kare dik piramitte
$|AB| = 12$ cm
olduğuna göre piramidin yüzey alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



Şekilde düzgün kare piramidin yüksekliği $h = |PO| = 8$ cm ve $[OH] \parallel [AB] \parallel [DC]$ çizilirse POH dik üçgeni oluşur.

$\widehat{COH} \sim \widehat{CAB}$ ile $|OH| = 6$ cm olur.

POH dik üçgeninde Pisagor teoreminden

$|PH|^2 = |PO|^2 + |OH|^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$ olur.

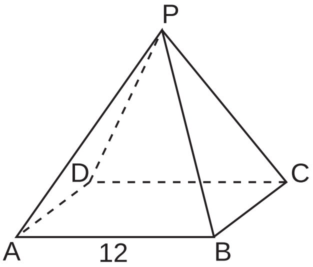
Buradan $|PH| = h' = 10$ cm olur.

Piramidin yanal alanı $Y_A = \frac{T_Ç \cdot h'}{2} = \frac{(4 \cdot 12) \cdot 10}{2} = \frac{480}{2} = 240\ cm^2$ olur.

Piramidin taban alanı $T_A = 12 \cdot 12 = 144\ cm^2$ olur.

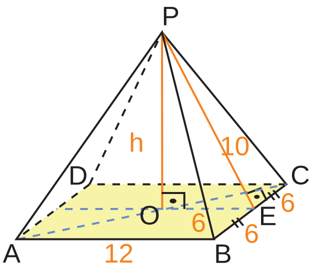
Bu durumda piramidin yüzey alanı $A = T_A + Y_A = 144 + 240 = 384\ cm^2$ bulunur.

ÖRNEK



Şekilde yanal alanı 240 cm^2 olan düzgün kare dik piramit verilmiştir.
$|AB| = 12$ cm
olduğuna göre düzgün piramidin yüksekliğinin kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



Şekilde düzgün kare piramidin yüksekliği $h = |PO|$ ve $[OH] \parallel [AB] \parallel [DC]$ çizilirse POH dik üçgeni oluşur.

$\widehat{COH} \sim \widehat{CAB}$ ile $|OH| = 6$ cm olur.

Kare piramidin taban çevresi $T_Ç = 4 \cdot 12 = 48$ cm dir.

Düzgün kare piramidin yanal alanı 240 cm^2 olduğundan

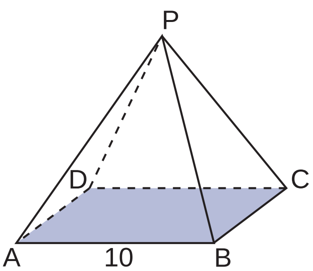
$$Y_A = \frac{T_Ç \cdot h'}{2} \Rightarrow 240 = \frac{48 \cdot h'}{2} \Rightarrow 480 = 48 \cdot h' \Rightarrow h' = |PH| = 10 \text{ cm olur.}$$

POH dik üçgeninde Pisagor teoreminden

$$|PH|^2 = |PO|^2 + |OH|^2$$

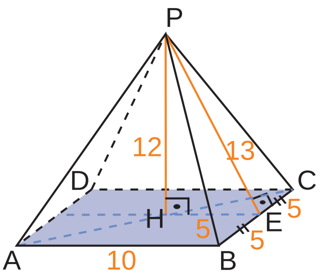
$$10^2 = |PO|^2 + 6^2 \Rightarrow |PO|^2 = 100 - 36 \Rightarrow |PO|^2 = 64 \Rightarrow |PO| = h = 8 \text{ cm bulunur.}$$

ÖRNEK



Şekildeki taban ayrıtının uzunluğu 10 cm olan düzgün kare piramidin hacmi 400 cm^3 olduğuna göre piramidin yanal alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



Düzgün kare piramidin tabanı bir kenar uzunluğu 10 cm olan kare olduğundan $T_A = 10^2 = 100 \text{ cm}^2$ dir.

Piramidin hacmi 240 cm^2 olduğundan

$$V = \frac{T_A \cdot h}{3} \Rightarrow 400 = \frac{100 \cdot h}{3} \Rightarrow 1200 = 100 \cdot h \Rightarrow h = 12 \text{ cm olur.}$$

Şekilde düzgün kare piramidin yüksekliği $h = |PH| = 12$ cm ve $[HE] \parallel [AB] \parallel [DC]$ çizilirse PHE dik üçgeni oluşur.

$\widehat{CHE} \sim \widehat{CAB}$ ile $|HE| = 5$ cm olur.

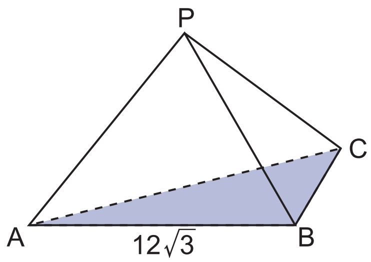
PHE dik üçgeninde Pisagor teoreminden

$$|PE|^2 = |PH|^2 + |HE|^2 \Rightarrow |PE|^2 = 12^2 + 5^2 \Rightarrow |PE|^2 = 144 + 25 = 169 \Rightarrow |PE| = h' = 13 \text{ cm olur.}$$

Düzgün kare piramidin taban çevresi $T_Ç = 4 \cdot 10 = 40$ cm olur.

$$Y_A = \frac{T_Ç \cdot h'}{2} = \frac{40 \cdot 13}{2} = \frac{520}{2} = 260 \text{ cm}^2 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

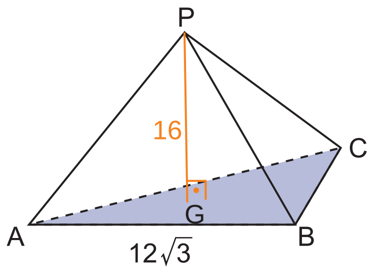


Şekildeki yüksekliği 16 cm olan eşkenar üçgen dik piramitte

$|AB| = 12\sqrt{3}$ cm

olduğuna göre piramidin hacminin kaç cm^3 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



Dik piramidin tabanı eşkenar üçgen olduğundan taban alanı

$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ olur.

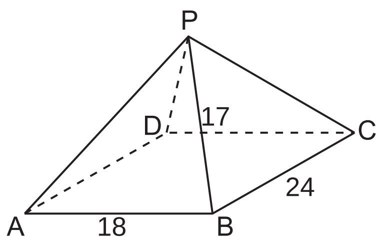
$a = 12\sqrt{3}$ cm olduğundan

$$T_A = \frac{(12\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 108\sqrt{3} \text{ cm}^2 \text{ olur.}$$

Bu durumda piramidin hacmi

$$V = \frac{T_A \cdot h}{3} = \frac{108\sqrt{3} \cdot 16}{3} = 576\sqrt{3} \text{ cm}^3 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK



Şekildeki dikdörtgen dik piramitte

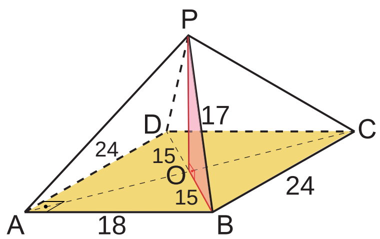
$|AB| = 18$ cm

$|BC| = 24$ cm

$|BP| = 17$ cm

olduğuna göre piramidin hacminin kaç cm^3 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



Dik piramidin tabanı dikdörtgen olduğundan taban alanı

$T_A = 18 \cdot 24 = 432$ cm^2 olur.

Dik piramidin yüksekliğini bulmak için önce tabanda DB köşegeni çizilir ve köşegenin orta noktası O olarak isimlendirilir. Piramidin tepe noktası olan P ile O noktası birleştirilirse PO uzunluğu piramidin yüksekliği olur. $[PO] \perp [DB]$ olduğundan POB dik üçgeninde Pisagor Teoremi uygulanarak piramidin yüksekliği

$$|PO|^2 + |OB|^2 = |PB|^2 \Rightarrow |PO|^2 + 15^2 = 17^2$$

$$\Rightarrow |PO| = 8 \text{ cm bulunur.}$$

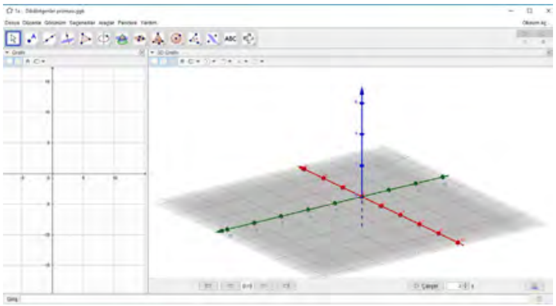
Bu durumda piramidin hacmi

$$V = \frac{T_A \cdot h}{3} = \frac{432 \cdot 8}{3} = 1152 \text{ cm}^3 \text{ bulunur.}$$

Bilgi ve İletişim Teknolojilerinden Yararlanarak Geometrik Şekilleri Çizme

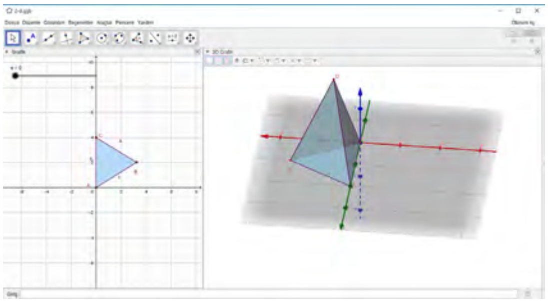
Düzgün Üçgen Piramit Çizimi

Dinamik matematik yazılımı programı çalıştırılır. Açılan pencerede geometri seçilir, görünümden **3D grafik penceresi** tercih edilir.



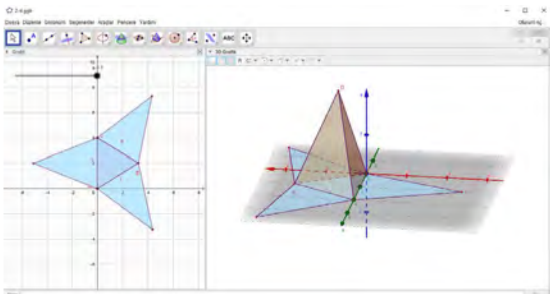
Araç çubuğunda **piramit** tıklanır ve piramit seçilir.

Çizilmek istenen piramit (cisim) için taban olacak bir çokgen çizilir ve cismin yüksekliği belirlenir. İstenilen piramit çizilmiş olur.



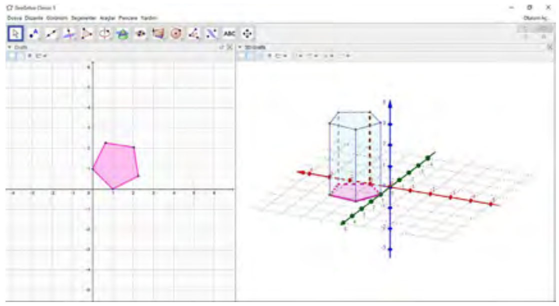
Piramidin yüzlerini açmak için piramit çizimi tamamlandıktan sonra araç çubuğundaki yüzleri açılmış piramit üzerine tıklanır gelen komut sekmesinde en altta bulunan **düzleme aç** seçilir.

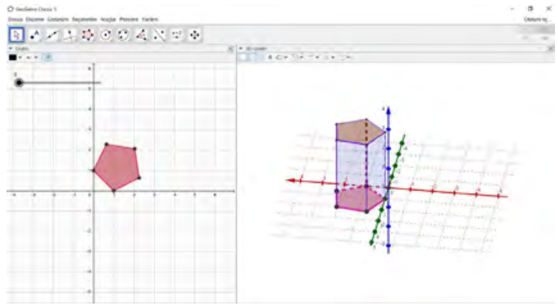
Sonra çizilen piramit üzerine tıklanır.

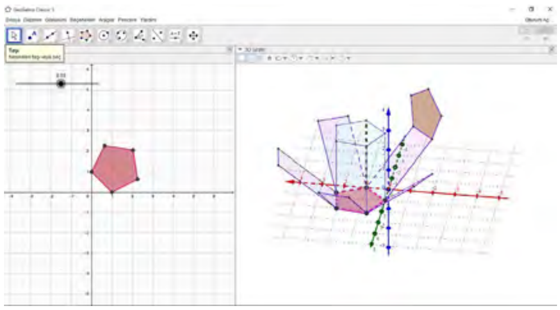


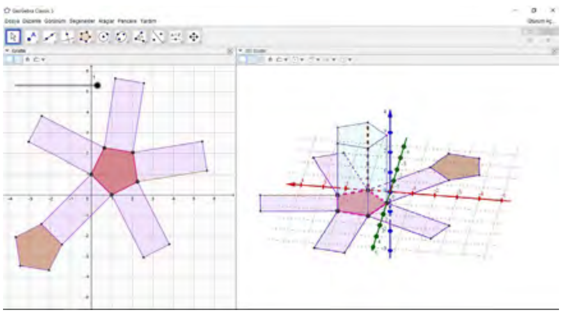
Sürgü üzerine sağ tık yapıldığında açılan komut sekmesinde **canlandırılıyor** seçilirse cismin yüzleri otomatik olarak düzleme açılma ve kapanma hareketleri yapar.

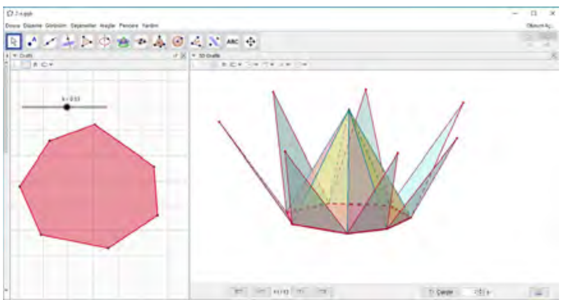
Çizim Uygulamaları





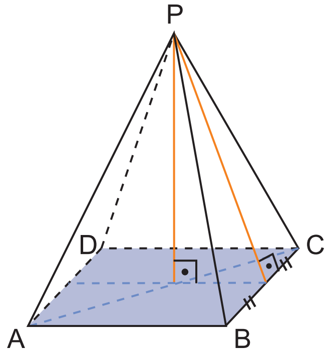






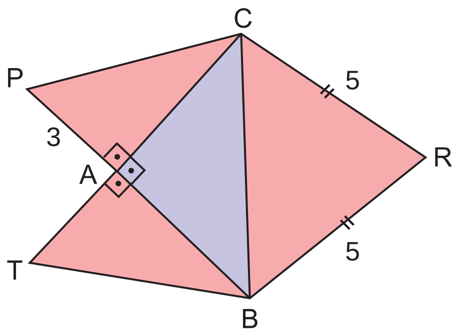
ALIŞTIRMALAR

1.



Şekildeki kare dik piramidin taban çevresi $16\sqrt{3}$ cm ve hacmi $48\ cm^3$ olduğuna göre bu piramidin yanal alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

2.



Şekilde ABC tabanlı dik üçgen piramidin açılmış hâli görülmektedir.

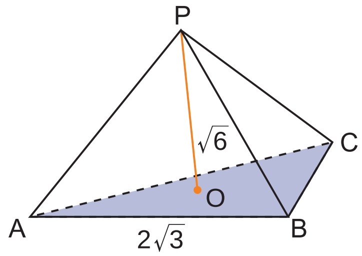
$[BP] \perp [TC]$

$|AP| = 3$ cm

$|CR| = |BR| = 5$ cm

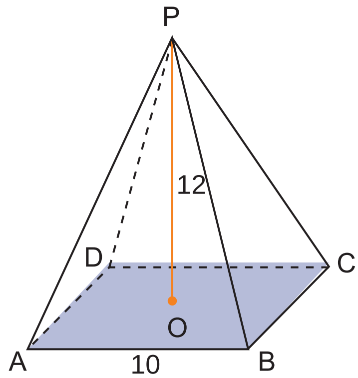
olduğuna göre bu piramidin hacminin kaç cm^3 olduğunu bulunuz.

3.



Şekildeki eşkenar üçgen dik piramidin yüksekliği $|PO| = \sqrt{6}$ cm ve $|AB| = 2\sqrt{3}$ cm olduğuna göre piramidin hacminin kaç cm^3 olduğunu bulunuz.

4.



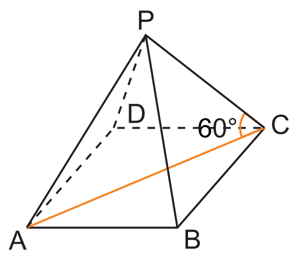
Şekildeki kare dik piramitte

$|AB| = 10$ cm

$|PO| = 12$ cm

olduğuna göre piramidin yüzey alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

5.



Şekildeki düzgün kare piramitte

$m(\widehat{PCA}) = 60^\circ$

$|AC| = 14$ cm

olduğuna göre piramidin yüksekliğinin kaç cm olduğunu bulunuz.

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

A) ***1- 5. cümlelerde boş bırakılan yerlere uygun sözcükleri yazınız.***

1. Tabanı düzgün çokgen olan dik piramitlere .... denir.

2. Tepe noktasından tabana çizilen dik doğru parçasının uzunluğuna piramidin .... denir.

3. Dikdörtgenler prizmasında aynı köşeden çıkan üç ayrıta bu dikdörtgenler prizmasının .... denir.

4. Yan ayrıtları dik olan prizmalara .... denir.

5. Dik prizmaların hacimleri taban alanı ile yüksekliğinin ....eşittir.

6. Dikdörtgenler prizmasında aynı yüzeyde karşılıklı iki köşeyi birleştiren doğru parçasına .... denir.

B) ***7. soruda numaralı ifadeler ile harfli ifadeleri eşleştirerek doğru cevapları ilgili kutucuklara yazınız.***

7. Taban ayrıtları 4 cm, 5 cm ve yüksekliği 12 cm olan dikdörtgenler prizmasının

I. Bütün ayrıtlarının uzunlukları toplamını bulunuz.

II. Yüzey alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

III. $\frac{5}{6}$ ü su ile dolu olduğuna göre suyun yüksekliğini bulunuz.

IV. Yüzey köşegenlerinden birinin uzunluğu bir tam sayı olduğuna göre bu köşegenin uzunluğunu bulunuz.

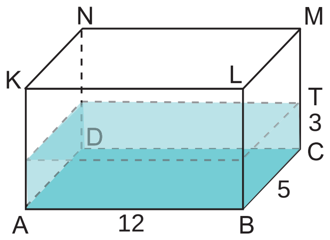
V. Taban kenarlarının uzunlukları ikişer cm artırılırsa prizmanın hacminin kaç cm^3 artacağını bulunuz.

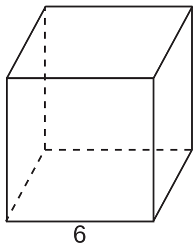
a . 256
b . 10
c . 3
d . 84
e . 264
f . 13

I.	II.	III.	IV.	V.

C) ***8-11. açık uçlu soruları cevaplandırınız.***

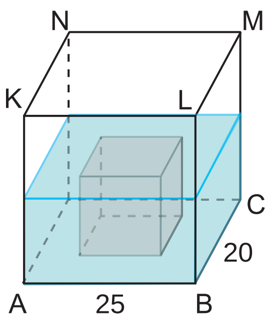
8.





Şekilde verilen içinde 3 cm yüksekliğinde su bulunan dikdörtgenler prizmasının taban ayrıtlarının uzunlukları $|AB| = 12$ cm ve $|BC| = 5$ cm verilmektedir. Prizmadaki suyun tamamı, bir kenar uzunluğu 6 cm olan şekildeki küpün içine boşaltılırsa küpteki suyun yüksekliğinin kaç cm olduğunu bulunuz.

9.



Şekilde içinde bir miktar su bulunan bir prizmada suya tamamen batmış metal bir küp görülmektedir.

Metal küpün bir ayrıt uzunluğu 10 cm dir.

$|AB| = 25$ cm

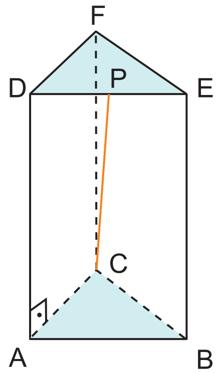
$|BC| = 20$ cm

olduğuna göre prizmanın içindeki küp dışarı çıkarılırsa suyun seviyesinin kaç cm azalacağını bulunuz.

10. Bütün ayrıt uzunlukları eşit olan bir kare düzgün piramidin bütün ayrıt uzunlukları toplamı 48 cm olduğuna göre hacminin kaç cm^3 olduğunu bulunuz.

Ç) 11-43. çoktan seçmeli soruların doğru seçeneklerini işaretleyiniz.

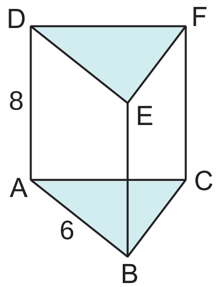
11.



Eşkenar üçgen dik prizmada
$|DP| = |PE|$
$|PC| = 13$ cm
$|BE| = 12$ cm
olduğuna göre prizmanın hacmi kaç santimetreküptür?

A) $20\sqrt{3}$ **B)** $25\sqrt{3}$ **C)** 75 **D)** $100\sqrt{3}$ **E)** $120\sqrt{3}$

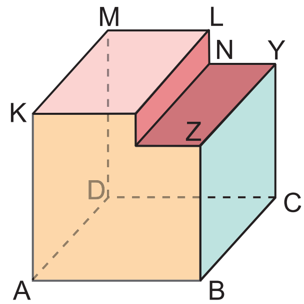
12.



Tabanı eşkenar üçgen olan dik prizmada
$|AB| = 6$ cm
$|AD| = 8$ cm
olduğuna göre A köşesinden hareket edip E köşesine uğrayıp C noktasına giden bir karıncanın alabileceği <u>en kısa</u> yol kaç santimetredir?

A) 5 **B)** $5\sqrt{3}$ **C)** 15 **D)** $15\sqrt{3}$ **E)** 20

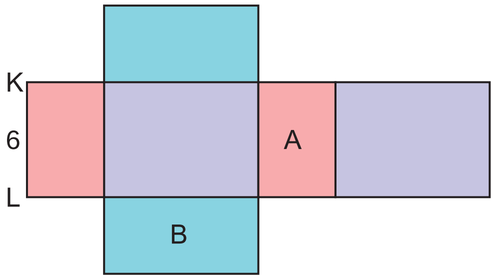
13.



Bir ayrıt uzunluğu 8 cm olan küpün bir köşesinden ayrıtları $|LN| = 1$ cm ve $|NY| = 3$ cm olacak biçimde dikdörtgenler prizması şeklindeki parça çıkarılıyor.
Buna göre kalan cismin alanı kaç santimetrekaredir?

A) 378 **B)** 380 **C)** 382 **D)** 384 **E)** 386

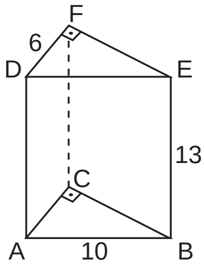
14.



Yukarıda bir dikdörtgenler prizmasının açılımı verilmiştir. **Bu açılımın çevresi 92 cm, $|KL| = 6$ cm ve A bölgesinin alanı 24 cm^2 olduğuna göre B bölgesinin alanı kaç santimetrekaredir?**

A) 6 **B)** 12 **C)** 24 **D)** 36 **E)** 48

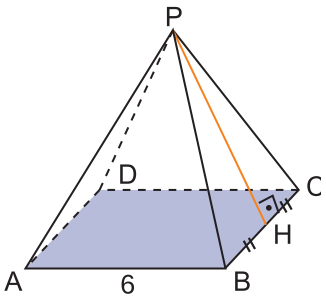
15.



Dik üçgen dik prizmada
$[CA] \perp [CB]$, $[FD] \perp [FE]$
$|DF| = 6$ cm
$|AB| = 10$ cm
$|BE| = 13$ cm
olduğuna göre dik üçgen dik prizmanın yüzey alanı kaç santimetrekaredir?

A) 150 B) 180 C) 360
D) 400 E) 420

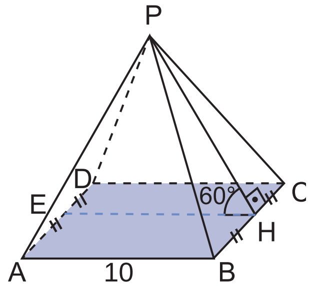
16.



Düzgün kare piramidin bir taban ayrıtı $|AB| = 6$ cm ve yan yüz yüksekliği $|PH| = 3\sqrt{10}$ cm olduğuna göre bu piramidin hacmi kaç santimetreküptür?

A) 100 B) 108 C) 116
D) 120 E) 126

17.



Bir taban ayrıtı $|AB| = 10$ cm olan kare dik piramidin yanal yüzleri taban düzlemi ile 60 derecelik açı yaptığına göre bu piramidin yüzey alanı kaç santimetrekaredir?

A) 150 B) 200 C) 250
D) 300 E) 350

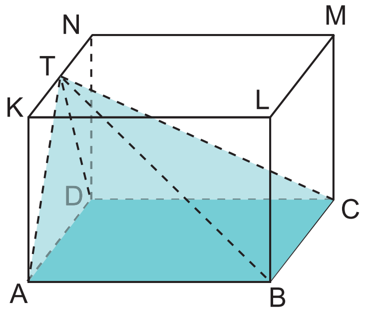
18. **Hacmi 240 cm^3 olan bir dikdörtgenler prizmasının farklı üç ayrıtının uzunlukları 2, 3 ve 5 sayıları ile orantılı olduğuna göre bu prizmanın alanı kaç santimetrekaredir?**

A) 248 B) 250 C) 265
D) 280 E) 324

19. **Cisim köşegen uzunluğu $2\sqrt{3}$ cm olan küpün hacmi kaç santimetreküptür?**

A) 4 B) 8 C) 12 D) 16 E) 20

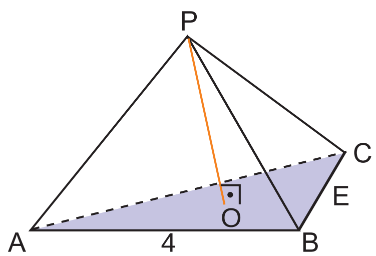
20.



Dikdörtgenler prizmasında
$|AB| = 9$ cm
$|BC| = 3$ cm
$|BL| = 6$ cm
olduğuna göre (T, ABCD) piramidinin hacmi kaç santimetreküptür?

A) 18 B) 27 C) 36 D) 45 E) 54

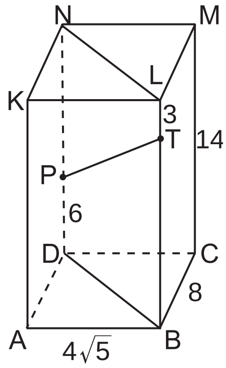
21.



Eşkenar üçgen dik piramidin hacmi $8\sqrt{3}$ cm^3 ve $|AB| = 4$ cm olduğuna göre piramidin yüksekliği kaç santimeredir?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

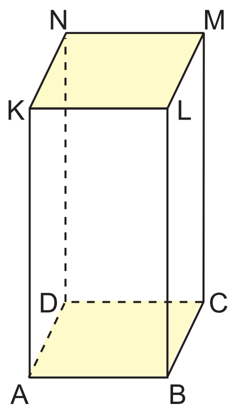
22.



Dikdörtgenler prizmasında
$|DP| = 2 \cdot |TL| = 6$ cm, $|BC| = 8$ cm,
$|AB| = 4\sqrt{5}$ cm ve $|CM| = 14$ cm
olduğuna göre $|PT| = x$ kaç santimetredir?

A) $2\sqrt{3}$ B) $3\sqrt{5}$ C) 10
D) 13 E) $6\sqrt{5}$

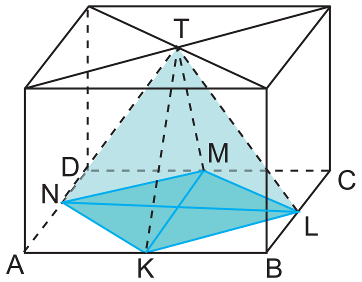
23.



Kare dik prizmanın tabanının bir kenar uzunluğu x cm ve hacmi $V = 5x^2$ cm^3 olduğuna göre yanal alanının x cinsinden ifadesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) 5x B) 10x C) 15x
D) 20x E) 25x

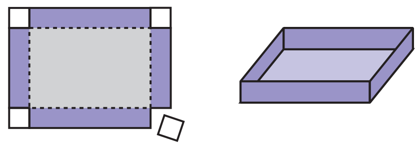
24.



Dikdörtgenler prizmasında ABCD tabanının kenar orta noktalarını köşe kabul eden dik piramidi verilmiştir. **Dikdörtgenler prizmasının hacmi 108 cm^3 olduğuna göre piramidin hacmi kaç santimetreküptür?**

A) 18 B) 24 C) 30 D) 36 E) 42

25.



I. Şekil II. Şekil

I. şekilde verilen boyutları 40 cm ve 30 cm olan dikdörtgen biçimindeki kartonun köşelerinden dört adet eş kare kesilip ayrılmıştır. Kalan parça kesikli çizgiler boyunca katlanarak II. şekildeki gibi üstü açık, yüksekliği 5 cm olan bir dikdörtgenler prizması elde edilmiştir. **Elde edilen prizmanın hacmi kaç santimetreküptür?**

A) 2500 B) 3000 C) 3500

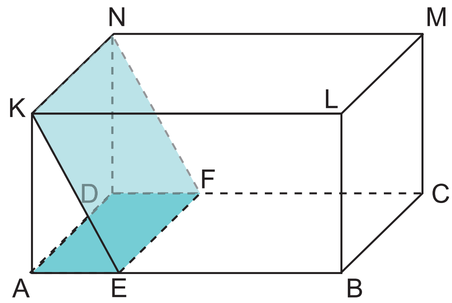
D) 4000 E) 4500

26. **Bir taban kenarının uzunluğu $2\sqrt{3}$ cm olan düzgün kare piramidin yan yüzleri birer eşkenar üçgen olduğuna göre bu piramidin hacmi kaç santimetreküptür?**

A) $4\sqrt{3}$ B) $8\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{6}$

D) $4\sqrt{6}$ E) 12

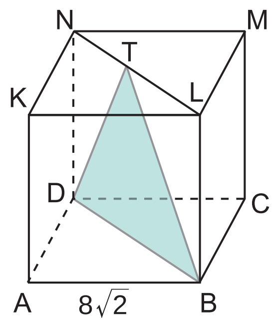
27.



Dikdörtgenler prizmasında [AD] // [EF] ve |AB| = 5·|AE| olduğuna göre ABCD tabanlı prizmanın hacmi AEK tabanlı üçgen prizmanın hacminin kaç katıdır?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

28.

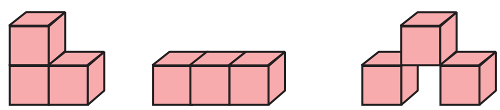


Şekildeki küpte $T \in [LN]$, $|AB| = 8\sqrt{2}$ cm olduğuna göre TDB üçgeninin alanı kaç santimetrekaredir?

A) $12\sqrt{2}$ B) $24\sqrt{3}$ C) 64

D) 72 E) $64\sqrt{2}$

29.



Şekilde dörder adet birim küpün birleştirilmesiyle elde edilen üç farklı cisim verilmiştir. **Buna göre bu cisimlerin yüzey alanları sırasıyla aşağıdakilerden hangisinde doğru verilmiştir?**

A) 12, 14, 12 B) 12, 14, 18 C) 14, 14, 12

D) 14, 14, 18 E) 16, 16, 18

Cebirsel İfadeler Cevap Anahtarı

27. sayfa
Alıştırmalar

1. 24
2. 35
3. 5
4. 14
5. -2
6. $3x+9$
7. 11
8. 2
9. 5
10. -1
11. 4
12. $3x^2+5x-2$

36. sayfa
Alıştırmalar

1. 160
2. $(x-y)\cdot(n-m)$
3. 9
4. $\frac{x}{7}$
5. $x-3$
6. $\frac{x+1}{x-3}$
7. 1
8. 2
9. $-x$
10. $x+4$
11. b
12. $x+1$

37. sayfa
Ölçme ve Değerlendirme

1. D, D, D, Y, D, D
2. 0, belirsiz
3. 3, -1
4. 24
5. 4, 9
6. $x-4$, $x+1$
7. I - c, II - a, III - d, IV - b, V - ç
8. 18
9. -9
10. 75
11. -1
12. $a+2$, $a+3$
13. A
14. C
15. D, D, D, Y, D, D
16. B
17. B
18. E
19. C
20. A
21. D
22. B
23. C
24. C
25. E
26. C
27. D
28. C
29. E
30. B
31. C
32. D
33. A
34. B
35. E
36. A

İkinci Dereceden Denklemler Cevap Anahtarı

52. sayfa
Alıştırmalar

1. $\{-10,2\}$
2. $\{-5,5\}$
3. $\{-\frac{3}{2}\}$
4. $\{-\frac{4}{3},\frac{5}{2}\}$
5. $\{-\frac{1}{2}\}$
6. a) 84 b) 5
   c) $(a-2)^2$
7. -7
8. $-\frac{3}{2}$
9. -1
10. 2
11. 8
12. $\{-1,3\}$
13. $-2,-4$
14. $\frac{7}{10}$

57. sayfa
Alıştırmalar

1. $2+4i$
2. $-24i$
3. a) $2-3i$ b) $5i+2$
   c) 7 d) $-4i$
4. 1
5. $\{-12i, 12i\}$
6. $\{-2-i,-2+i\}$
7. -19
8. -2
9. i
10. 1

63. sayfa
Alıştırmalar

1. $\{2,4\}$
2. -3
3. $\frac{1}{3}$
4. $\frac{1}{6}$
5. -9
6. x^2+5x+6
7. x^2-4x+1
8. $\sqrt{10}$
9. 2
10. $x^2+2x-47=0$

64. sayfa
Ölçme ve Değerlendirme

1. gerçek, karmaşık
2. $\frac{q}{p}, -\frac{r}{p}$
3. eşleniği
4. D, D, Y, D, D
5. I. d, II. e, III. ç IV. b, V.c
6. $\{1-\sqrt{5}, 1+\sqrt{5}\}$
7. 4
8. $x^2-6x+7=0$
9. $x^2+3x-1=0$
10. 12
11. A
12. D
13. D
14. D
15. C
16. B
17. D
18. E
19. B
20. C
21. C
22. B
23. C
24. D
25. D
26. A
27. D
28. C
29. A
30. B
31. C
32. E
33. E
34. B
35. A
36. A
37. E
38. B
39. C
40. D

Çember ve Daire Cevap Anahtarı

78. sayfa
Alıştırmalar

1. I. teğeti, II. keseni, III. kirişi, IV. merkezinden, V. çap, VI. çemberin yayı
2. I, II, III, IV, V ve VI.
3. 6
4. 13
5. 3
6. 5

86. sayfa
Alıştırmalar

1. I. merkez açı, II. eşittir, III. çevre açı, IV. yarısına, V. 90
2. 50°
3. 50°
4. 108°
5. 70°
6. 100°

95. sayfa
Alıştırmalar

1. I. daire, II. π, III. daire dilimi, IV. $2\pi r$, V. πr^2
2. 16π
3. 24
4. 100π
5. 10
6. 2π
7. 60°
8. 9π
9. $\frac{75\pi}{2}$

96. sayfa
Ölçme ve Değerlendirme

1. Y, Y, Y, D, Y
2. üzerindedir
3. çevre
4. $\frac{1}{2}$
5. merkez
6. çevre
7. I. c, II. e, III. a, IV. b, V. d
8. 4
9. 140°
10. 60°
11. 2π
12. B
13. C
14. B
15. D
16. D
17. D
18. A
19. C
20. D
21. C
22. E
23. B
24. D
25. E
26. C
27. E
28. B
29. D
30. C
31. B
32. A
33. D
34. B
35. A
36. B
37. B
38. E

Katı Cisimler Cevap Anahtarı

112. sayfa
Alıştırmalar

1. I. pirizmanın tabanları, II. dikdörtgen, III. toplamına, IV. prizmanın yüksekliği, V. yanal alanına
2. 390
3. 180
4. $4\sqrt{3}$
5. 128
6. $\frac{14\sqrt{3}}{5}$
7. 7
8. 24
9. $2\sqrt{11}$
10. $4\sqrt{5}$
11. 5
12. 92

117. sayfa
Alıştırmalar

1. a. $5\sqrt{2}$, $5\sqrt{3}$, b.150, c. 125
2. 64
3. 64
4. $18\sqrt{3}$
5. 189
6. 72
7. a. 64, b. 1500, c. 12000

124. sayfa
Alıştırmalar

1. $24\sqrt{7}$
2. 8
3. $3\sqrt{2}$
4. 360
5. $7\sqrt{3}$

125. sayfa
Ölçme ve Değerlendirme

1. düzgün piramit
2. yüksekliği
3. boyutları
4. dik prizma
5. çarpımına
6. yüzey köşegeni
7. I. d, II. a, III. b, IV. f, V. e
8. 5
9. 2
10. 72
11. D
12. E
13. A
14. E
15. C
16. B
17. D
18. A
19. B
20. E
21. C
22. D
23. D
24. D
25. B
26. D
27. E
28. E
29. D

SÖZLÜK

-A-

açı : Başlangıç noktaları ortak olan iki ışının birleşimi.

ağırlık merkezi : Bir şeklin tüm ağırlığının toplanmış olduğu kabul edilen nokta.

-C-

cisim köşegeni : Prizmada çapraz köşeleri birleştiren doğru parçası.

-Ç-

çevre : Kapalı bir şeklin kenar uzunlukları toplamı veya kapalı bir eğrinin uzunluğu.

çokgensel bölge : Sınırı bir çokgen olan bölge.

-D-

doğru : Uzunluğu sürekli iki yöne sınırsız uzatılabilen ve düz kalınlığı bulunmayan geometrik terim.

doğru parçası : Bir doğrunun herhangi bir parçası.

düzgün çokgen : Kenar uzunlukları birbirine eşit ve iç açılarının ölçüleri birbirine eşit çokgen.

düzlem : Uzunluğu ve genişliği, düz ve sınırsız genişletilebilen fakat kalınlığı bulunmayan geometrik terim.

-E-

eşlenik : Çarpımları rasyonel sayı olan iki ifadenin birbirine göre durumu.

-H-

hacim : Bir cismin uzayda kapladığı yer.

hipotenüs : Bir dik üçgende dik açı karşısındaki kenar.

-K-

kenarortay : Bir üçgenin herhangi bir köşesini,karşı kenarın orta noktasına birleştiren doğru parçası.

köşegen : Bir çokgende ardışık olmayan iki köşeyi birleştiren doğru parçası.

-M-

mutlak değer : Sayı doğrusu üzerinde bir sayının sıfır noktasına olan uzaklığı.

-P-

Pisagor teoremi : Bir dik üçgende dik kenarlarının uzunluklarının kareleri toplamı, hipotenüs uzunluğunun karesine eşit olan.

-S-

sanal kısım : Karmaşık sayıdaki i nin katsayısı.

-U-

uzay : Uzunluğu, genişliği ve yüksekliği düz sınırsız genişletilebilen geometrik terim.

KAYNAKÇA

- Türkçe Sözlük. (2011). 11. Baskı. Ankara. TDK Yayınları.
- Yazım Kılavuzu. (2012). 27. Baskı. Ankara. TDK Yayınları.
- T.C. Millî Eğitim Bakanlığı (2020). Mesleki ve Teknik Eğitim Merkezleri Matematik Dersi 9, 10, 11 ve 12. Sınıflar Öğretim Programı.

Bu kitabın genel ağ kaynakçası ile görsel kaynakçası için karekodu okutalım.