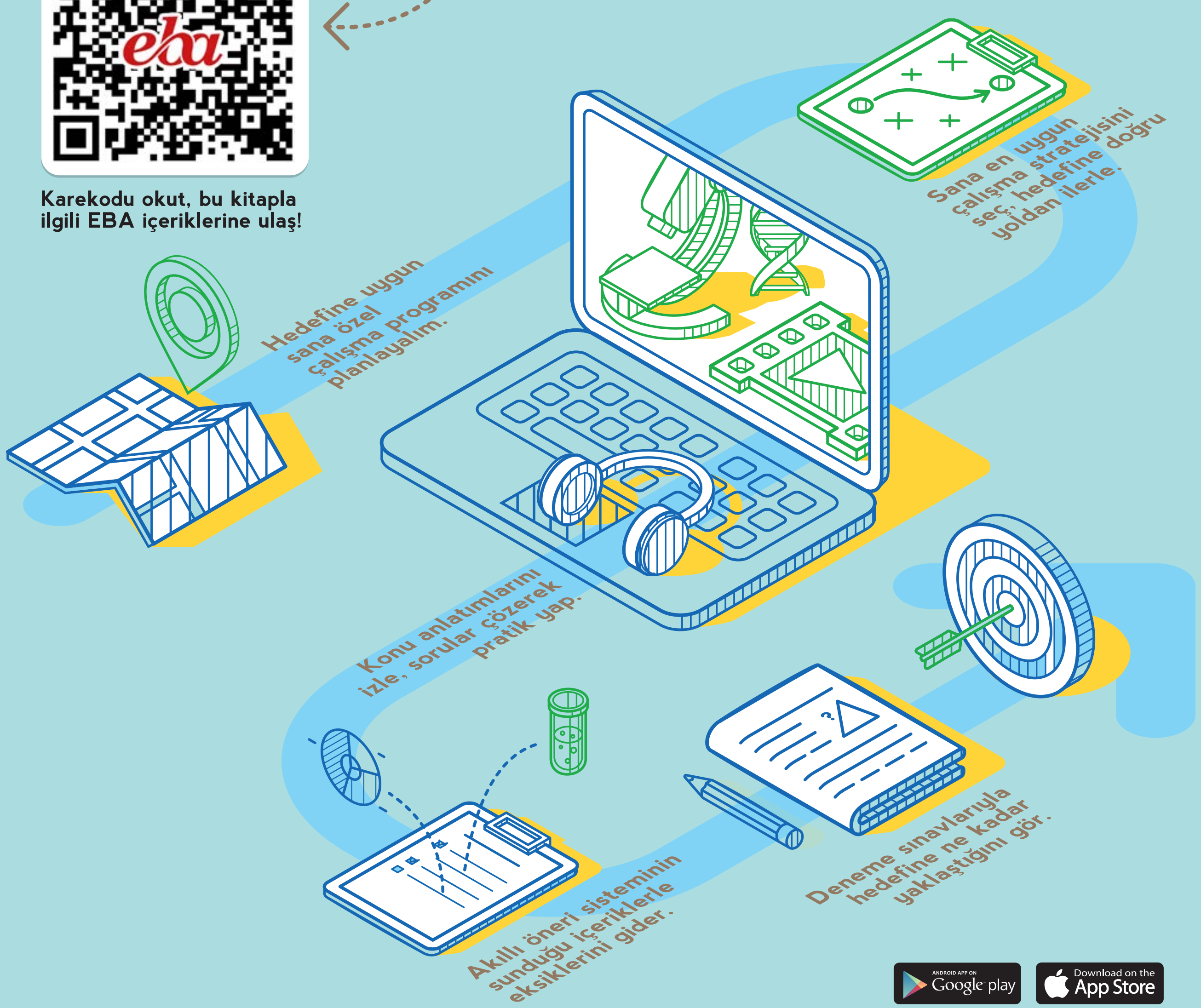
Bu kitaba sığmayan daha neler var!

Karekodu okut, bu kitapla ilgili EBA içeriklerine ulaş!



BU DERS KİTABI MİLLÎ EĞİTİM BAKANLIĞINCA ÜCRETSİZ OLARAK VERİLMİŞTİR.
PARA İLE SATILAMAZ.

ISBN: 978-975-11-6694-4

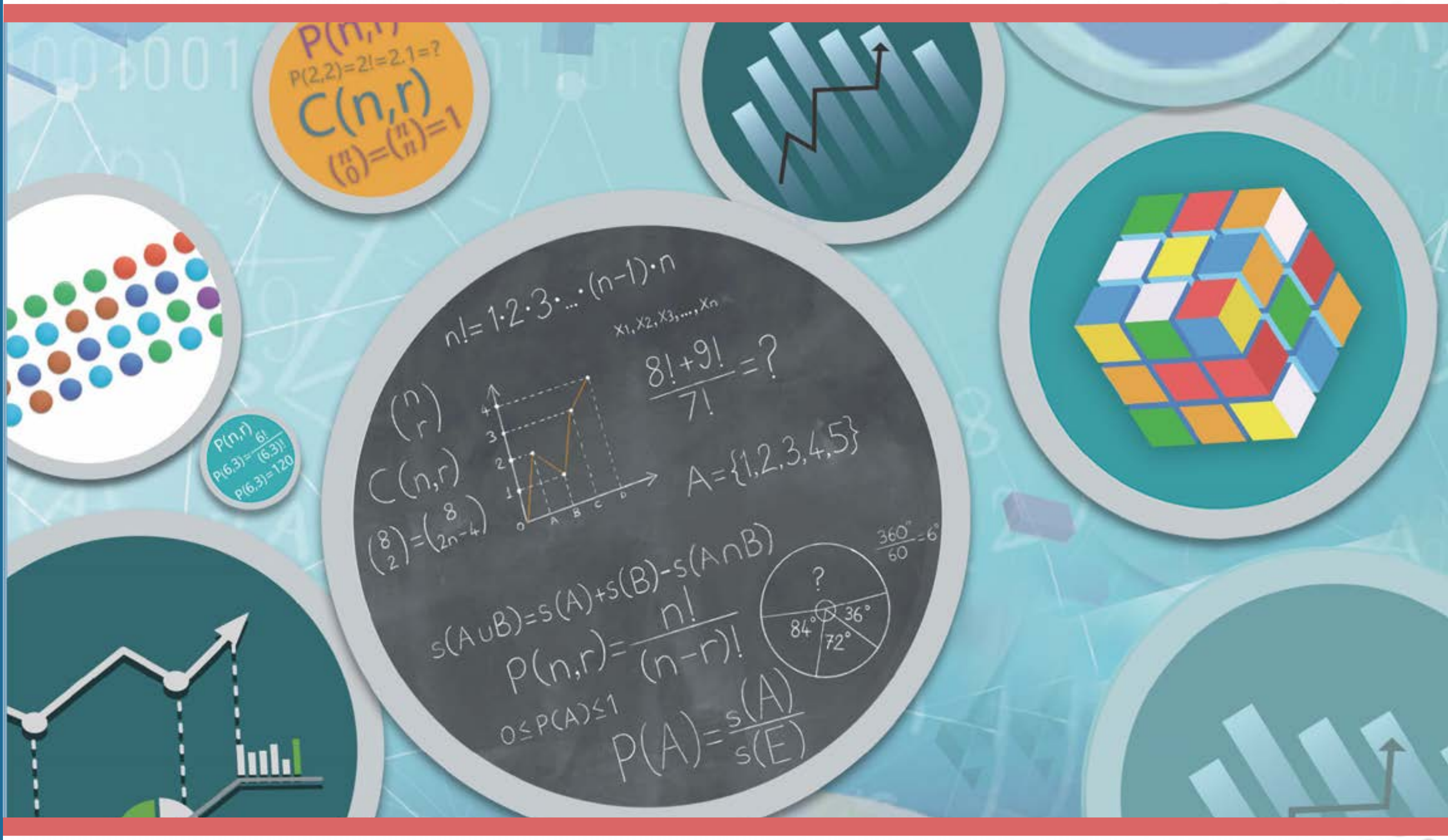
Bandrol Uygulamasına İlişkin Usul ve Esaslar Hakkında Yönetmeliğin Beşinci Maddesinin İkinci Fıkrası Çerçevesinde Bandrol Taşıması Zorunlu Değildir.

MESLEKİ EĞİTİM MERKEZİ MATEMATİK 11. SINIF DERS KİTABI

T.C. MİLLÎ EĞİTİM BAKANLIĞI | ORTAÖĞRETİM | DERS KİTABI

MESLEKİ EĞİTİM MERKEZİ

MATEMATİK
11



MESLEKİ EĞİTİM MERKEZİ

MATEMATİK

11

DERS KİTABI

YAZARLAR

Gökhan GÜNEŞ
Melike KARABULUT
Vedat GÜLMEZ

MİLLÎ EĞİTİM BAKANLIĞI YAYINLARI ....: 8719
YARDIMCI VE KAYNAK KİTAPLAR DİZİSİ ....: 2604

HAZIRLAYANLAR

Editör
Prof. Dr. Ali GÜVEN

Dil Uzmanı
Duygu TAYHANİ KUŞ

Program Geliştirme Uzmanı
Prof. Dr. Erdoğan TEZCİ

Rehberlik ve Psikolojik Danışmanlık Uzmanı
İlyas TİPİ

Görsel Tasarım Uzmanı
Sertan AKSAKAL

Grafik Tasarım Uzmanı
Rahman ÖZDEMİR

Bu kitap Meslekî Eğitim Merkezleri diploma fark derslerine yönelik 11. sınıf, 1 saatlik matematik dersi için hazırlanmıştır.

ISBN 978-975-11-6694-4

Millî Eğitim Bakanlığı, Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığının 26.12.2022 gün ve 66759109 sayılı yazısı ile eğitim aracı olarak kabul edilmiştir.

İSTİKLÂL MARŞI

Korkma, sönmez bu şafaklarda yüzen al sancak;
Sönmeden yurdumun üstünde tüten en son ocak.
O benim milletimin yıldızıdır, parlayacak;
O benimdir, o benim milletimindir ancak.

Çatma, kurban olayım, çehreni ey nazlı hilâl!
Kahraman ırkıma bir gül! Ne bu şiddet, bu celâl?
Sana olmaz dökülen kanlarımız sonra helâl.
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl.

Ben ezelden beridir hür yaşadım, hür yaşarım.
Hangi çılgın bana zincir vuracakmış? Şaşarım!
Kükremiş sel gibiyim, bendimi çiğner, aşarım.
Yırtarım dağları, enginlere sığmam, taşarım.

Garbın âfâkını sarmışsa çelik zırhlı duvar,
Benim iman dolu göğsüm gibi serhaddim var.
Ulusun, korkma! Nasıl böyle bir imanı boğar,
Medeniyyet dediğin tek dişi kalmış canavar?

Arkadaş, yurduma alçakları uğratma sakın;
Siper et gövdeni, dursun bu hayâsızca akın.
Doğacaktır sana va'dettiği günler Hakk'ın;
Kim bilir, belki yarın, belki yarından da yakın.

Bastığın yerleri toprak diyerek geçme, tanı:
Düşün altındaki binlerce kefensiz yatanı.
Sen şehit oğlusun, incitme, yazıktır, atanı:
Verme, dünyaları alsan da bu cennet vatanı.

Kim bu cennet vatanın uğruna olmaz ki feda?
Şüheda fışkıracak toprağı sıksan, şüheda!
Cânı, cânânı, bütün varımı alsın da Huda,
Etmesin tek vatanımdan beni dünyada cüda.

Ruhumun senden İlâhî, şudur ancak emeli:
Değmesin mabedimin göğsüne nâmahrem eli.
Bu ezanlar -ki şehadetleri dinin temeli-
Ebedî yurdumun üstünde benim inlemeli.

O zaman vecd ile bin secde eder -varsa- taşım,
Her cerîhamdan İlâhî, boşanıp kanlı yaşım,
Fışkırır ruh-ı mücerret gibi yerden na'şım;
O zaman yükselerek arşa değer belki başım.

Dalgalan sen de şafaklar gibi ey şanlı hilâl!
Olsun artık dökülen kanlarımın hepsi helâl.
Ebediyyen sana yok, ırkıma yok izmihlâl;
Hakkıdır hür yaşamış bayrağımın hürriyet;
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl!

Mehmet Âkif Ersoy

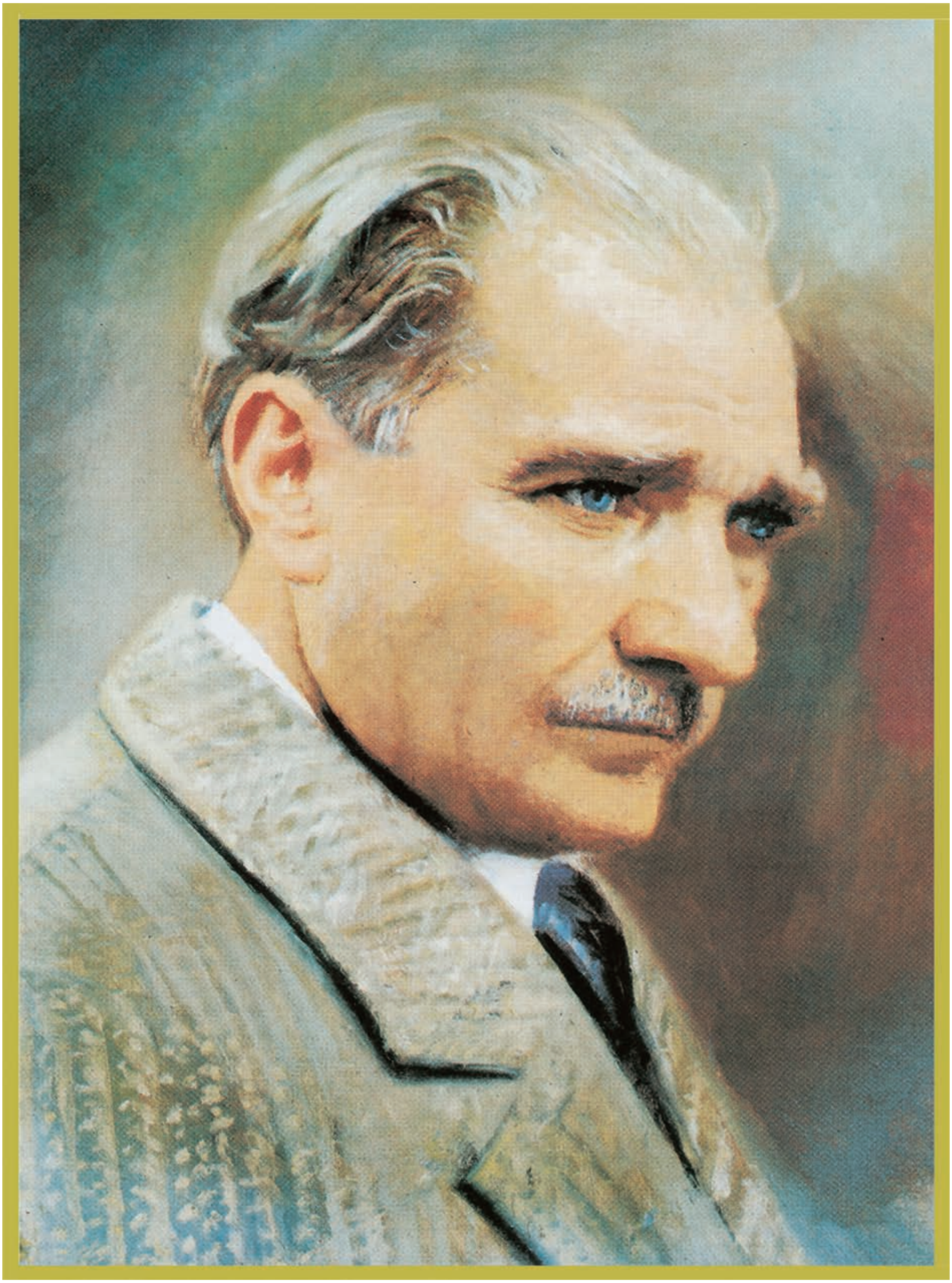
GENÇLİĞE HİTABE

Ey Türk gençliği! Birinci vazifen, Türk istiklâlini, Türk Cumhuriyetini, ilelebet muhafaza ve müdafaa etmektir.

Mevcudiyetinin ve istikbalinin yegâne temeli budur. Bu temel, senin en kıymetli hazinendir. İstikbalde dahi, seni bu hazineden mahrum etmek isteyecek dâhilî ve hâricî bedhahların olacaktır. Bir gün, istiklâl ve cumhuriyeti müdafaa mecburiyetine düşersen, vazifeye atılmak için, içinde bulunacağın vaziyetin imkân ve şeraitini düşünmeyeceksin! Bu imkân ve şerait, çok namüsait bir mahiyette tezahür edebilir. İstiklâl ve cumhuriyetine kastedecek düşmanlar, bütün dünyada emsali görülmemiş bir galibiyetin mümessili olabilirler. Cebren ve hile ile aziz vatanın bütün kaleleri zapt edilmiş, bütün tersanelerine girilmiş, bütün orduları dağıtılmış ve memleketin her köşesi bilfiil işgal edilmiş olabilir. Bütün bu şeraitten daha elîm ve daha vahim olmak üzere, memleketin dâhilinde iktidara sahip olanlar gaflet ve dalâlet ve hattâ hıyanet içinde bulunabilirler. Hattâ bu iktidar sahipleri şahsî menfaatlerini, müstevlîlerin siyasî emelleriyle tevhit edebilirler. Millet, fakr u zaruret içinde harap ve bîtap düşmüş olabilir.

Ey Türk istikbalinin evlâdı! İşte, bu ahval ve şerait içinde dahi vazifen, Türk istiklâl ve cumhuriyetini kurtarmaktır. Muhtaç olduğun kudret, damarlarındaki asil kanda mevcuttur.

Mustafa Kemal Atatürk



MUSTAFA KEMAL ATATÜRK

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER VE GÖSTERİMLER

$=$	:	eşittir
$\neq$	:	eşit değildir
$\varnothing, \{\ \}$	:	boş küme
$s(A)$	:	A kümesinin eleman sayısı
$\cap$	:	kesişim
$\cup$	:	birleşim
$\mathbb{N}$	:	doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	:	tam sayılar kümesi
$\mathbb{Z}^+$	:	pozitif tam sayılar kümesi
x^n	:	üslü sayı
$\sqrt{x}$	:	kare köklü sayı
$\sqrt{\ }$	:	karekök
$\frac{a}{b}$	:	a nın b ye oranı
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$	:	orantı
E	:	evrensel küme
$\Rightarrow$	:	ise
%	:	yüzde
$P(A)$	:	A olayının olasılığı
$n!$	:	n faktöriyel
$P(n,\ r)$	:	n nin r li permütasyonu
$C(n,r),\ \binom{n}{r}$	:	n nin r li kombinasyonu
$P(A \cap B)$	:	A ve B olayının olasılığı
$P(A \cup B)$	:	A veya B olayının olasılığı
A'	:	A olayının tümleyeni
$\overline{X}$	:	aritmetik ortalama
S	:	standart sapma
$\approx$	:	yaklaşık

KİTABIN TANITIMI

Ünite adını gösterir.

Ünite kapaklarını gösterir.

Ünite içindeki terim ve kavramları gösterir.

Ünite kazanımlarını gösterir.

Hazırlık çalışması sorularını gösterir.

11.1. VERİ

KAZANIMLAR
11.1.1. MERKEZİ EĞİLİM VE YAYILIM ÖLÇÜLERİ
11.1.2. VERİLERİN GRAFİKLE GÖSTERİLMESİ

TERİM VE KAVRAMLAR
Veri, kesikli veri, sürekli veri, aritmetik ortalama, ortanca (medyan), tepe değer (mod), açıklık, en büyük değer, en küçük değer, standart sapma, çizgi grafiği, sütun grafiği, daire grafiği

HAZIRLIK ÇALIŞMALARI
Bir araştırma şirketi toplumda bilinçli ilaç kullanımı bilgisini geliştirmek ve farkındalık yaratmak için 10 ilde anket uygulaması yapmıştır; anket uygulanan hane sayıları

73, 45, 58, 73, 42, 81, 37, 62, 73, 21

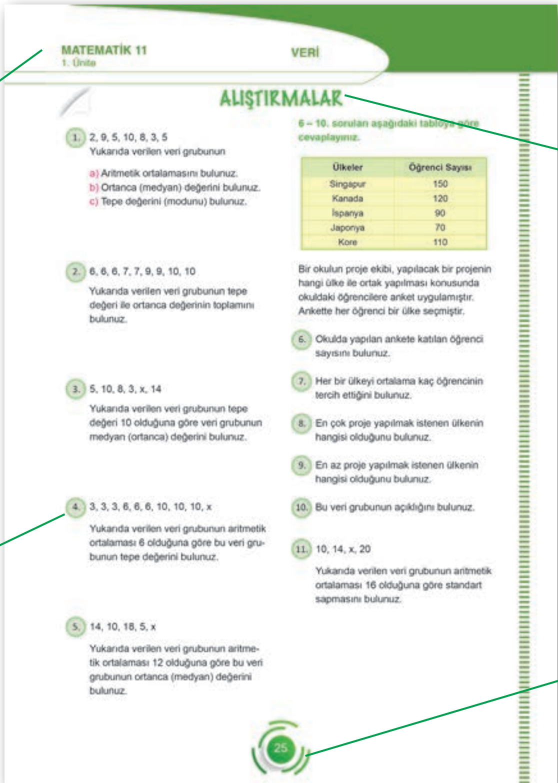
şeklindedir. Buna göre

1. Bir ilde ortalama kaç adet anket uygulanmıştır?
2. Anketin uygulandığı hane sayıları küçükten büyüğe doğru sıralandığında ortadaki değer nedir?
3. En çok tekrar eden değer nedir?
4. En büyük ve en küçük değer arasındaki fark kaçtır?

11

Sınıf düzeyini gösterir.

Alıştırmalar bölümünü gösterir.



MATEMATİK 11
1. Ünite
VERİ

ALIŞTIRMALAR

1. 2, 9, 5, 10, 8, 3, 5
Yukarıda verilen veri grubunun
a) Aritmetik ortalamasını bulunuz.
b) Ortanca (medyan) değerini bulunuz.
c) Tepe değerini (modunu) bulunuz.

2. 6, 6, 6, 7, 7, 9, 9, 10, 10
Yukarıda verilen veri grubunun tepe değeri ile ortanca değerinin toplamını bulunuz.

3. 5, 10, 8, 3, x, 14
Yukarıda verilen veri grubunun tepe değeri 10 olduğuna göre veri grubunun medyan (ortanca) değerini bulunuz.

4. 3, 3, 3, 6, 6, 6, 10, 10, 10, x
Yukarıda verilen veri grubunun aritmetik ortalaması 6 olduğuna göre bu veri grubunun tepe değerini bulunuz.

5. 14, 10, 18, 5, x
Yukarıda verilen veri grubunun aritmetik ortalaması 12 olduğuna göre bu veri grubunun ortanca (medyan) değerini bulunuz.

6 – 10. soruları aşağıdaki tabloya göre cevaplayınız.

Ülkeler	Öğrenci Sayısı
Singapur	150
Kanada	120
İspanya	90
Japonya	70
Kore	110

Bir okulun proje ekibi, yapılacak bir projenin hangi ülke ile ortak yapılması konusunda okuldaki öğrencilere anket uygulamıştır. Ankette her öğrenci bir ülke seçmiştir.

6. Okulda yapılan ankete katılan öğrenci sayısını bulunuz.

7. Her bir ülkeyi ortalama kaç öğrencinin tercih ettiğini bulunuz.

8. En çok proje yapılmak istenen ülkenin hangisi olduğunu bulunuz.

9. En az proje yapılmak istenen ülkenin hangisi olduğunu bulunuz.

10. Bu veri grubunun açıklığını bulunuz.

11. 10, 14, x, 20
Yukarıda verilen veri grubunun aritmetik ortalaması 16 olduğuna göre standart sapmasını bulunuz.

25

Alıştırma soru numarasını gösterir.

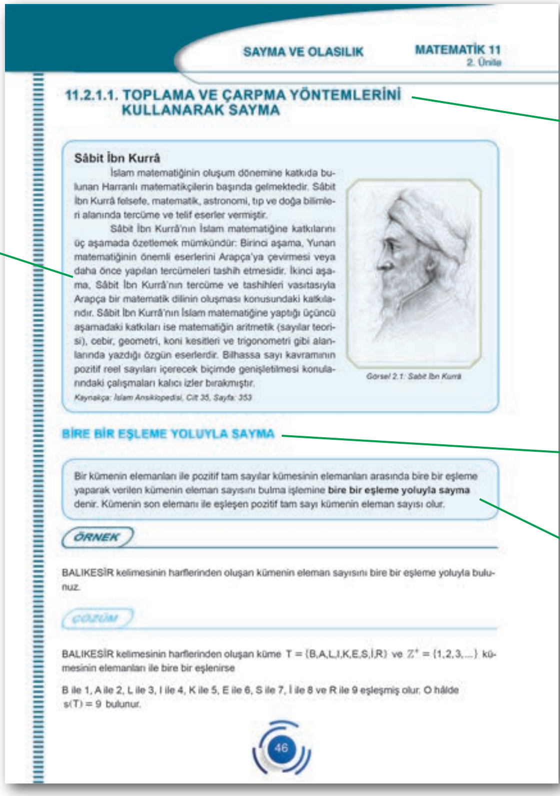
Sayfa numaralarını gösterir.

Bilim insanları hakkında bilgilendirme bölümlerini gösterir.

Konu ile ilgili kazanım başlıklarını gösterir.

Konu alt başlıklarını gösterir.

Tanım alanlarını gösterir.



SAYMA VE OLASILIK MATEMATİK 11 2. Ünite

11.2.1.1. TOPLAMA VE ÇARPMA YÖNTEMLERİNİ KULLANARAK SAYMA

Sâbit İbn Kurrâ

İslam matematiğinin oluşum dönemine katkıda bulunan Harranlı matematikçilerin başında gelmektedir. Sâbit İbn Kurrâ felsefe, matematik, astronomi, tıp ve doğa bilimleri alanında tercüme ve telif eserler vermiştir.

Sâbit İbn Kurrâ'nın İslam matematiğine katkılarını üç aşamada özetlemek mümkündür: Birinci aşama, Yunan matematiğinin önemli eserlerini Arapça'ya çevirmesi veya daha önce yapılan tercümeleri tashih etmesidir. İkinci aşama, Sâbit İbn Kurrâ'nın tercüme ve tashihleri vasıtasıyla Arapça bir matematik dilinin oluşması konusundaki katkılarıdır. Sâbit İbn Kurrâ'nın İslam matematiğine yaptığı üçüncü aşamadaki katkıları ise matematiğin aritmetik (sayılar teorisi), cebir, geometri, koni kesitleri ve trigonometri gibi alanlarında yazdığı özgün eserlerdir. Bilhassa sayı kavramının pozitif reel sayıları içerecek biçimde genişletilmesi konularındaki çalışmaları kalıcı izler bırakmıştır.

Kaynakça: İslam Ansiklopedisi, Cilt 35, Sayfa: 353

Görsel 2.1: Sabit İbn Kurrâ

BİRE BİR EŞLEME YOLUYLA SAYMA

Bir kümenin elemanları ile pozitif tam sayılar kümesinin elemanları arasında bire bir eşleme yaparak verilen kümenin eleman sayısını bulma işlemine **bire bir eşleme yoluyla sayma** denir. Kümenin son elemanı ile eşleşen pozitif tam sayı kümenin eleman sayısı olur.

ÖRNEK

BALIKESİR kelimesinin harflerinden oluşan kümenin eleman sayısını bire bir eşleme yoluyla bulunuz.

ÇÖZÜM

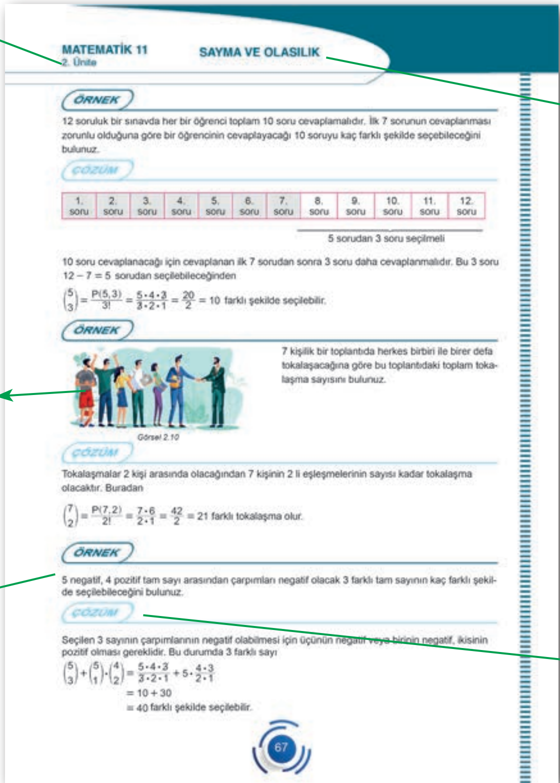
BALIKESİR kelimesinin harflerinden oluşan küme $T = \{B, A, L, I, K, E, S, İ, R\}$ ve $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, ...\}$ kümesinin elemanları ile bire bir eşlenirse

B ile 1, A ile 2, L ile 3, I ile 4, K ile 5, E ile 6, S ile 7, İ ile 8 ve R ile 9 eşleşmiş olur. O hâlde $s(T) = 9$ bulunur.

46

Ünite numarasını gösterir.

Ünite adını gösterir.



MATEMATİK 11 2. Ünite SAYMA VE OLASILIK

ÖRNEK

12 soruluk bir sınavda her bir öğrenci toplam 10 soru cevaplamalıdır. İlk 7 sorunun cevaplanması zorunlu olduğuna göre bir öğrencinin cevaplayacağı 10 soruyu kaç farklı şekilde seçebileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

1. soru	2. soru	3. soru	4. soru	5. soru	6. soru	7. soru	8. soru	9. soru	10. soru	11. soru	12. soru

5 sorudan 3 soru seçilmeli

10 soru cevaplanacağı için cevaplanan ilk 7 sorudan sonra 3 soru daha cevaplanmalıdır. Bu 3 soru $12 - 7 = 5$ sorudan seçilebileceğinden

$\binom{5}{3} = \frac{P(5,3)}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{20}{2} = 10$ farklı şekilde seçilebilir.

ÖRNEK

7 kişilik bir toplantıda herkes birbiri ile birer defa tokalaşacağına göre bu toplantıdaki toplam tokalaşma sayısını bulunuz.

Görsel 2.10

ÇÖZÜM

Tokalaşmalar 2 kişi arasında olacağından 7 kişinin 2 li eşleşmelerinin sayısı kadar tokalaşma olacaktır. Buradan

$\binom{7}{2} = \frac{P(7,2)}{2!} = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = \frac{42}{2} = 21$ farklı tokalaşma olur.

ÖRNEK

5 negatif, 4 pozitif tam sayı arasından çarpımları negatif olacak 3 farklı tam sayının kaç farklı şekilde seçilebileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

Seçilen 3 sayının çarpımlarının negatif olabilmesi için üçünün negatif veya birinin negatif, ikisinin pozitif olması gereklidir. Bu durumda 3 farklı sayı

$$\binom{5}{3} + \binom{5}{1} \cdot \binom{4}{2} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} + 5 \cdot \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1}$$
$$= 10 + 30$$
$$= 40 \text{ farklı şekilde seçilebilir.}$$

67

Soru ile ilgili görselleri gösterir.

Örnek soru alanlarını gösterir.

Çözüm alanlarını gösterir.

11.1. VERİ

KAZANIMLAR

11.1.1. MERKEZİ EĞİLİM VE YAYILIM ÖLÇÜLERİ

11.1.2. VERİLERİN GRAFİKLE GÖSTERİLMESİ

TERİM VE KAVRAMLAR

Veri, kesikli veri, sürekli veri, aritmetik ortalama, ortanca (medyan), tepe değer (mod), açıklık, en büyük değer, en küçük değer, standart sapma, çizgi grafiği, sütun grafiği, daire grafiği

HAZIRLIK ÇALIŞMALARI

Bir araştırma şirketi toplumda bilinçli ilaç kullanımı bilgisini geliştirmek ve farkındalık yaratmak için 10 ilde anket uygulaması yapmıştır; anket uygulanan hane sayıları

73, 45, 58, 73, 42, 81, 37, 62, 73, 21

şeklindedir. Buna göre

1. Bir ilde ortalama kaç adet anket uygulanmıştır?
2. Anketin uygulandığı hane sayıları küçükten büyüğe doğru sıralandığında ortadaki değer nedir?
3. En çok tekrar eden değer nedir?
4. En büyük ve en küçük değer arasındaki fark kaçtır?

11.1.1. MERKEZİ EĞİLİM VE YAYILIM ÖLÇÜLERİ

Araştırılan konuya açıklık getirmek için ölçüm, sayım, deney ya da gözlem gibi yöntemler kullanılarak elde edilen toplanmış ve çözümlenmiş bilgilere **veri** denir.

Tanımlı olduğu aralıkta sadece tam sayı değerleri alabilen veri türüne **kesikli veri**; tüm gerçek sayı değerlerini alabilen veri türüne ise **sürekli veri** denir. Hacim, ağırlık, uzunluk, vb. ölçüler sürekli verilerdir.

ÖRNEK

I. Bir mandırada bir haftada satılan süt miktarı.
II. Bir yılda bir otomobil firmasının üretmiş olduğu otomobil sayısı.
III. Son beş günde bir acil servise gelen hastaların vücut sıcaklık değerleri.
IV. Bir okuldaki öğrenci sayısı.
V. Bir koşuda final çizgisine gelen birinci atlet ile ikinci atlet arasındaki süre farkı.

Yukarıdaki verilerden hangilerinin kesikli, hangilerinin sürekli veri türüne ait örnek olduğunu bulunuz.

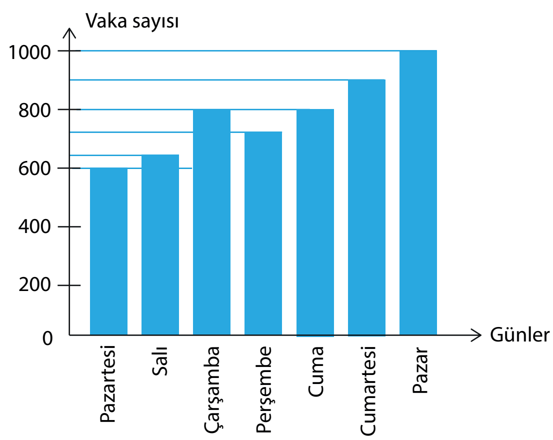
ÇÖZÜM

II ve IV. veriler sadece doğal sayılarla ifade edilebileceğinden kesikli verilerdir.

I, III ve V. veriler tüm gerçek sayı değerlerini alabileceğinden sürekli verilerdir.

ÖRNEK

Bir salgın hastalıktaki bir haftalık vaka sayılarının günlere göre dağılımı yandaki grafikte verilmiştir. Buna göre bu grafiğin hangi tür verilerden oluştuğunu bulunuz.

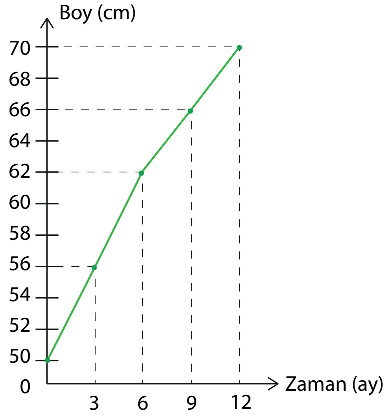


ÇÖZÜM

Vaka sayıları sadece doğal sayılarla ifade edilebileceğinden tüm gerçek sayı değerlerini alamaz. Buna göre bir haftalık vaka sayılarını günlere göre gösteren grafik, kesikli verilerden oluşmaktadır.

ÖRNEK

Bir bebeğin boy uzunluğunun aylara göre dağılımı yandaki grafikte gösterilmiştir.
Buna göre bu grafiğin hangi tür verilerden oluştuğunu bulunuz.



ÇÖZÜM

Boy uzunluğu tüm gerçek sayı değerlerini alabileceğinden bir bebeğin boy uzunluğunu aylara göre gösteren grafik, sürekli verilerden oluşmaktadır.

11.1.1.1. VERİLERİ MERKEZİ EĞİLİM VE YAYILIM ÖLÇÜLERİNİ HESAPLAYARAK YORUMLAMA

MERKEZİ EĞİLİM ÖLÇÜLERİ

Bir veri grubunun hangi değer etrafında toplandığını gösteren sayısal değerlerdir.

Bunlar aritmetik ortalama, ortanca (medyan) ve tepe değer (mod) olarak adlandırılır.

1. Aritmetik Ortalama

Veri grubunda bulunan verilerin toplamının veri sayısına bölünmesiyle elde edilen değere **aritmetik ortalama** denir. Aritmetik ortalama $\overline{X}$ sembolü ile gösterilir ve

$$\overline{X} = \frac{\text{Sayısal verilerin toplamı}}{\text{Veri sayısı}}$$ ile hesaplanır.

Aritmetik ortalama veri grubunun elemanı olmak zorunda değildir.

ÖRNEK

2, 2, 3, 4, 5, 5, 7, 7, 10 veri grubunun aritmetik ortalamasını bulunuz.

ÇÖZÜM

9 veriden oluşan bu veri grubunun aritmetik ortalaması,

$$\overline{X} = \frac{\text{Sayısal verilerin toplamı}}{\text{Veri sayısı}} = \frac{2+2+3+4+5+5+7+7+10}{9} = \frac{45}{9} = 5 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

2, 3, 5, x, y, 10 veri grubunun aritmetik ortalaması 6 olduğuna göre $x + y$ toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

6 veriden oluşan bu veri grubunun aritmetik ortalaması 6 olduğundan

$$\overline{X} = \frac{\text{Sayısal verilerin toplamı}}{\text{Veri sayısı}} \Rightarrow 6 = \frac{2+3+5+x+y+10}{6}$$

$$\Rightarrow 6 = \frac{x+y+20}{6}$$

$$\Rightarrow x+y+20 = 6 \cdot 6$$

$$\Rightarrow x+y+20 = 36$$

$$\Rightarrow x+y = 36-20$$

$$\Rightarrow x+y = 16 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

Yıllar	Üretim Miktarı (ton)
2017	27
2018	36
2019	41
2020	48

Yukarıda verilen tablo bir çiftçinin 2017 – 2020 yılları arasında ürettiği buğday miktarını göstermektedir. Buna göre bu çiftçinin yıllık ortalama kaç ton buğday ürettiğini bulunuz.

ÇÖZÜM

Çiftçinin ürettiği toplam buğday miktarı $27 + 36 + 41 + 48 = 152$ tondur. Tabloda 4 yıllık buğday miktarı verildiğinden veri sayısı 4 olur.
Bu durumda bu çiftçinin 4 yıl boyunca üretmiş olduğu yıllık ortalama buğday miktarı,

$$\overline{X} = \frac{\text{Sayısal verilerin toplamı}}{\text{Veri sayısı}}$$

$$= \frac{27+36+41+48}{5}$$

$$= \frac{152}{4}$$

$$= 38 \text{ ton bulunur.}$$

ÖRNEK

10 kişilik bir turist kafilesinin yaş ortalaması 26 dır. Bu kafileye yaş ortalaması 20 olan 5 kişi daha katılıyor. Buna göre son durumda turist kafilesinin yaş ortalamasının kaç olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

10 kişilik bir turist kafilesinin veri sayısı 10, turist kafilesinin yaş ortalaması 26 olduğundan $\overline{X} = 26$ olur. O hâlde turist kafilesinin yaşları toplamı,

$$\overline{X} = \frac{\text{Sayısal verilerin toplamı}}{\text{Veri sayısı}} \Rightarrow 26 = \frac{\text{Sayısal verilerin toplamı}}{10}$$

$\Rightarrow$ Sayısal verilerin toplamı $= 26 \cdot 10 = 260$ bulunur.

Kafileye katılan 5 turistin yaş ortalaması 20 olduğundan $\overline{X} = 20$ ve veri sayısı 5 tir. Bu durumda kafileye katılan turistlerin yaşları toplamı,

$$\overline{X} = \frac{\text{Sayısal verilerin toplamı}}{\text{Veri sayısı}} \Rightarrow 20 = \frac{\text{Sayısal verilerin toplamı}}{5}$$

$\Rightarrow$ Sayısal verilerin toplamı $= 20 \cdot 5 = 100$ bulunur.

O hâlde son durumda turist kafilesinin yaşları toplamı $260 + 100 = 360$, kafiledeki kişi sayısı ise $10 + 5 = 15$ olur. Buna göre son durumda turist kafilesinin yaş ortalaması,

$\overline{X} = \frac{360}{15} = 24$ bulunur.

ÖRNEK

Aşağıdaki tabloda dört kişilik bir ailenin 5 günlük su tüketim miktarı litre cinsinden verilmiştir.

Gün	1.	2.	3.	4.	5.
Su Tüketim (litre)	411	478	522	369	390

Buna göre dört kişilik bu ailenin günlük ortalama kaç litre su tükettiğini bulunuz.

ÇÖZÜM

Dört kişilik bir ailenin 5 günde tükettiği su miktarı $411 + 478 + 522 + 369 + 390 = 2170$ litredir.

5 günde tüketilen su miktarı verildiğinden veri sayısı 5 olur.

Buna göre bu ailenin günlük ortalama tükettiği su miktarı,

$$\overline{X} = \frac{\text{Sayısal verilerin toplamı}}{\text{Veri sayısı}} = \frac{411 + 478 + 522 + 369 + 390}{5} = \frac{2170}{5} = 434 \text{ litre bulunur.}$$

ÖRNEK

18 kişinin katıldığı tekerlekli sandalye tenis yarışmasında tüm yarışmacıların yaş ortalaması 25 tir. Bu yarışmadan yaşları 32 ve 34 olan iki yarışmacı elenmiştir. Buna göre devam eden yarışmacıların yaş ortalamasının kaç olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Veri sayısı 18 ve yarışmacıların yaş ortalaması 25 olduğundan $\overline{X} = 25$ tir.
Bu durumda,

$$\overline{X} = \frac{\text{Sayısal verilerin toplamı}}{\text{Veri sayısı}} \Rightarrow 25 = \frac{\text{Sayısal verilerin toplamı}}{18}$$

$\Rightarrow$ sayısal verilerin toplamı $= 25 \cdot 18 = 450$ bulunur.

Tekerlekli sandalye tenis yarışmasından elenen iki yarışmacının yaşları toplamı $32 + 34 = 66$ olduğundan eleme sonrası yarışmacıların yaşları toplamı $450 - 66 = 384$ olur.
Son durumda yarışmacı sayısı ise $18 - 2 = 16$ olur.
Buna göre eleme sonrası tekerlekli sandalye tenis yarışmasında kalan yarışmacıların yaş ortalaması, $\overline{X} = \dfrac{\text{Sayısal verilerin toplamı}}{\text{Veri sayısı}} = \dfrac{384}{16} = 24$ bulunur.

ÖRNEK

10 kişilik bir grubun yaş ortalaması 18 dir. Bu gruba üç kişi daha katıldığında grubun yaş ortalaması 20 olduğuna göre gruba katılan üç kişinin yaşları toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

10 kişilik bir grubun veri sayısı 10, grubun yaş ortalaması 18 olduğundan $\overline{X} = 18$ dir.
Bu durumda,

$$\overline{X} = \frac{\text{Sayısal verilerin toplamı}}{\text{Veri sayısı}} \Rightarrow 18 = \frac{\text{Sayısal verilerin toplamı}}{10}$$

$\Rightarrow$ sayısal verilerin toplamı $= 18 \cdot 10 = 180$ bulunur.

Bu gruba katılan üç kişinin yaşları toplamı y olsun. Bu durumda grubun yaşları toplamı $y + 180$ ve veri sayısı $10 + 3 = 13$ olur. Son durumda grubun aritmetik ortalaması 20 olduğundan

$$\overline{X} = \frac{\text{Sayısal verilerin toplamı}}{\text{Veri sayısı}} \Rightarrow 20 = \frac{y + 180}{13}$$

$\Rightarrow y + 180 = 20 \cdot 13$

$\Rightarrow y + 180 = 260$

$\Rightarrow y = 260 - 180$

$\Rightarrow y = 80$ bulunur.

2. Ortanca (Medyan)

Bir veri grubunun ortanca (medyan) değeri; veri grubu küçükten büyüğe ya da büyükten küçüğe doğru sıralandığında veri sayısı tek ise ortadaki veridir, çift ise ortadaki iki verinin aritmetik ortalamasıdır.

Ortanca (medyan) veri grubunun elemanı olmayabilir.

ÖRNEK

Aşağıdaki tablo Elif'in bir haftada okuduğu günlük kitap sayfa sayısını göstermektedir.

Gün	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
Elif'in okuduğu kitap sayfa sayısı	27	35	32	41	46	23	21

Buna göre veri grubunun ortanca değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Elif'in okuduğu günlük kitap sayfa sayılarının küçükten büyüğe doğru sıralanışı
21, 23, 27, 32, 35, 41, 46 olur.
Veri grubu 7 veriden oluştuğundan 4. sıradaki veri olan 32 sayısı veri grubunun ortancasıdır.

ÖRNEK

4, 6, 6, 5, 3, 4, 7, 8, 2, 4 veri grubunun ortanca değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Veri grubu küçükten büyüğe doğru sıralanırsa 2, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 8 olur.
Veri sayısı olan 10 çift sayı olduğundan ortanca, ortadaki iki değerin aritmetik ortalamasıdır.

Bu durumda ortadaki iki değer olan 4 ile 5 in aritmetik ortalaması,
$\frac{4+5}{2} = \frac{9}{2} = 4,5$ ortanca değeri olur.

ÖRNEK

5, 13, 17, 23, 17, x veri grubunun aritmetik ortalama değeri 15 olduğuna göre ortanca değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

6 veriden oluşan veri grubunun aritmetik ortalaması 15 olduğundan

$\overline{X} = 15 = \frac{5+13+17+23+17+x}{6} \Rightarrow 15 = \frac{x+75}{6}$

$\Rightarrow x+75 = 15 \cdot 6 \Rightarrow x+75 = 90 \Rightarrow x = 90-75 \Rightarrow x = 15$ olur.

Veri grubu küçükten büyüğe doğru sıralanırsa 5, 13, 15, 17, 17, 23 olur. Veri sayısı olan 6 çift sayı olduğundan ortanca, ortadaki iki değerin aritmetik ortalamasıdır. Bu durumda ortadaki iki değer olan 15 ile 17 nin aritmetik ortalaması: $\frac{15+17}{2} = \frac{32}{2} = 16$ ortanca değeri olur.

ÖRNEK

8, 8, 10, 13, x, 23, 33, 36
Yukarıda küçükten büyüğe doğru sıralanmış olarak verilen veri grubunun ortanca değeri 16 olduğuna göre x değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Veri grubunun veri sayısı olan 8 bir çift sayı olduğundan ortanca, ortadaki iki değerin aritmetik ortalamasıdır. O hâlde ortadaki iki değer olan 13 ile x in aritmetik ortalaması ortanca değeri olur. Bu durumda veri grubunun ortanca değeri 16 olduğundan

$$\frac{13+x}{2} = 16 \Rightarrow 13+x = 16 \cdot 2$$
$$\Rightarrow 13+x = 32$$
$$\Rightarrow x = 32-13$$
$$\Rightarrow x = 19 \text{ bulunur.}$$

3. Tepe Değer (Mod)

Bir veri grubunda en çok tekrar eden veriye grubun **tepe değeri (modu)** denir.

- Veri grubunda her veri aynı sayıda tekrar etmiş ise bu veri grubunun tepe değeri (modu) yoktur.
- Eğer veri grubunda en çok tekrar eden birden fazla veri varsa birden çok tepe değer (mod) olur.
- Mod, veri grubunun elemanı olmak zorundadır.

ÖRNEK

2, 3, 2, 5, 4, 2, 7, 9, 3, 5 veri grubunun tepe değerini (modunu) bulunuz.

ÇÖZÜM

Veri grubunda 2, üç kez; 3, iki kez; 5, iki kez; 4, bir kez; 7, bir kez ve 9, bir kez tekrar etmiştir.

En çok tekrar eden veri 2 dir. O hâlde veri grubunun tepe değeri (modu) 2 olur.

ÖRNEK

Aşağıdaki veri grubunda bir hafta boyunca bir hastanenin acil servisine giriş yapan hasta sayıları verilmiştir.
32, 43, 54, 32, 48, 43, 52
Buna göre bu veri grubunun tepe değerini (modunu) bulunuz.

ÇÖZÜM

32 ve 43 sayıları ikişer kez tekrar ettiğinden her ikisi de bu veri grubunun birer modudur.

ÖRNEK

3, 3, 3, 5, 5, 5, 0, 0, 0, 1, 1, 1 veri grubunun tepe değerini (modunu) bulunuz.

ÇÖZÜM

Veri grubundaki her veri aynı sayıda tekrar ettiği için bu veri grubunun tepe değeri yoktur.

ÖRNEK

8, 10, 13, 9, 8, 13, 17, 21, 8 veri grubunun ortanca değeri ile tepe değerinin toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

Veri grubunu küçükten büyüğe doğru sıraladığımızda 8, 8, 8, 9, 10, 13, 13, 17, 21 olur.
Veri grubunun ortanca değeri, veri sayısı olan 9 tek sayı olduğundan tam ortadaki değerdir. O hâlde veri grubunun ortanca değeri 10 bulunur.

Veri grubunda en çok tekrar eden veri 8 dir. O hâlde veri grubunun tepe değeri 8 olur.
Bu durumda veri grubunun ortanca ile tepe değerinin toplamı $10+8=18$ bulunur.

ÖRNEK

14, x, 25, 16, 15 veri grubunun aritmetik ortalaması 17 olduğuna göre ortanca ve tepe değerinin toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

5 veriden oluşan veri grubunun aritmetik ortalaması 17 olduğundan

$$\overline{X}=\frac{\text{Sayısal verilerin toplamı}}{\text{Veri sayısı}} \Rightarrow 17=\frac{14+x+25+16+15}{5}$$

$$\Rightarrow 17=\frac{x+70}{5}$$

$$\Rightarrow x+70=17\cdot 5$$

$$\Rightarrow x+70=85$$

$$\Rightarrow x=85-70$$

$$\Rightarrow x=15 \text{ olur.}$$

O hâlde veri grubu küçükten büyüğe doğru sıralanırsa 14, 15, 15, 16, 25 olur. Veri sayısı olan 5 tek sayı olduğundan ortanca, tam ortadaki değer olan 15 tir.

Veri grubunun tepe değeri ise en çok tekrar eden veri olan 15 tir.

Bu durumda veri grubunun ortanca (medyan) ve tepe değerinin toplamı $15+15=30$ bulunur.

ÖRNEK

Bir bal arısı kolonisinin son 8 yılda ürettiği bal miktarlarının kilogramları

23, 28, 26, 36, 28, 38, 41, 36

olduğuna göre bu koloninin

a) Yılda ortalama kaç kg bal ürettiğini bulunuz.
b) Ürettiği bal miktarlarından oluşan veri grubunun kilogram cinsinden ortancasını (medyanını) bulunuz.
c) Ürettiği bal miktarlarından oluşan veri grubunun kilogram cinsinden tepe değerini (modunu) bulunuz.

ÇÖZÜM

a) Bal arısı kolonisi 8 yılda toplam $23 + 28 + 26 + 36 + 28 + 38 + 41 + 36 = 256\,\text{kg}$ bal üretmiştir. Arıların 8 yılda ürettikleri bal miktarı verildiğinden veri sayısı 8 dir. Bu durumda arı kolonisi yılda ortalama

$$\overline{X} = \frac{\text{Sayısal verilerin toplamı}}{\text{Veri sayısı}} = \frac{256}{8} = 32\,\text{kg} \text{ bal üretir.}$$

b) Bal arısı kolonisinin ürettiği bal miktarları küçükten büyüğe doğru sıralanırsa 23, 26, 28, 28, 36, 36, 38, 41 olur. Veri sayısı olan 8 bir çift sayı olduğundan veri grubunun ortanca (medyan) değeri ortadaki iki değer olan 28 ve 36 nın aritmetik ortalamasıdır. Bu durumda ortanca $\frac{28 + 36}{2} = 32$ bulunur.

c) 28 ve 36 en çok tekrar eden veriler olduğundan her iki değer de veri grubunun birer tepe değeridir.

MERKEZİ YAYILIM ÖLÇÜLERİ

Bir veri grubundaki verilerin birbirine yakınlık veya uzaklığı hakkında bilgi veren ölçülerdir. En sık kullanılan merkezi yayılım ölçüleri açıklık ve standart sapmadır.

En Büyük ve En Küçük Değer

Veri grubundaki sayılar küçükten büyüğe doğru sıralandığında elde edilen en büyük sayıya veri grubunun **en büyük değeri**, en küçük sayıya ise veri grubunun **en küçük değeri** denir.

ÖRNEK

21, 18, 43, 15, 34, 24
Yukarıda verilen veri grubunun en büyük ve en küçük değerinin toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

Veri grubu küçükten büyüğe doğru sıralanırsa 15, 18, 21, 24, 34, 43 olur.

Bu durumda veri grubunun en küçük değerinin 15, en büyük değerinin 43 olduğu görülür.

O hâlde veri grubunun en büyük değeri ile en küçük değerinin toplamı $15 + 43 = 58$ bulunur.

1. Açıklık

Veri grubundaki en büyük değer ile en küçük değer arasındaki farka **açıklık** denir.

Açıklık = En büyük değer − En küçük değer

ÖRNEK

Ağaç Cinsi	Elma	Armut	Erik	Kiraz	Dut	Ayva
Ağaç Sayısı	45	72	38	52	23	64

Yukarıdaki tabloda bir bahçedeki meyve ağaçlarının cinslerine göre sayıları verilmiştir. Buna göre bu veri grubunun en büyük değerini, en küçük değerini ve açıklığını bulunuz.

ÇÖZÜM

Bahçedeki meyve ağaçlarının sayıları küçükten büyüğe doğru sıralanırsa
23, 38, 45, 52, 64, 72 olur.

Bu durumda veri grubunun en büyük değeri 72, en küçük değeri 23 olur.

Buna göre veri grubunun açıklığı $72 - 23 = 49$ bulunur.

ÖRNEK

x, 3, 5, 4, 2, 7, 10 veri grubunun açıklığı 8 olduğuna göre veri grubunun ortancasının (medyanının) alabileceği değerleri bulunuz.

ÇÖZÜM

Verilen veri grubunda x dışındaki verilerden oluşan gruptaki en küçük veri 2 en büyük veri 10 dur. Bu durumda x dışındaki verilerden oluşan grubun açıklığı $10 - 2 = 8$ olur. x sayısı bu veri grubuna dahil edildiğinde de veri grubunun açıklığı 8 olması gerektiğinden x en az 2, en fazla 10 olabilir.
Bu durumda x in alabileceği değerler 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 olur.
2, 3, 4, 5, 7, 10, x veri grubunda,

- x in 2, 3, 4 değeri için ortanca 4;
- x in 5, 6, 7, 8, 9, 10 değeri için ortanca 5 olur.

2. Standart Sapma

Standart sapma, bir veri grubundaki her bir verinin aritmetik ortalamadan ne kadar uzaklaştığı hakkında bilgi verir. Standart sapma **"S"** sembolü ile gösterilir.

Veri grubunun standart sapması aşağıdaki adımların sırasıyla uygulanması ile bulunur.

1. adım: Veri grubundaki verilerin aritmetik ortalaması bulunur.
2. adım: Verilerin her birinin aritmetik ortalama ile farkları bulunur.
3. adım: Farkların her birinin kareleri alınıp toplamı bulunur.
4. adım: Bu toplamın veri sayısının bir eksiğine bölünmesiyle elde edilen değerin karekökü alınır.

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ veri grubunun aritmetik ortalaması $\overline{X}$ olmak üzere,

$$\mathbf{S} = \sqrt{\frac{(x_1-\overline{X})^2+(x_2-\overline{X})^2+(x_3-\overline{X})^2+\ldots+(x_n-\overline{X})^2}{n-1}}$$ eşitliği ile hesaplanır.

Standart sapma değeri küçük ise veriler arasındaki farkın az, büyük ise veriler arasındaki farkın çok olduğu söylenebilir.

ÖRNEK

Koray'ın matematik dersi sınavlarından aldığı puanlar 84, 78 ve 90 dır.
Buna göre Koray'ın matematik dersinden aldığı puanların standart sapmasını bulunuz.

ÇÖZÜM

Koray üç sınava girdiği için veri sayısı 3 olur.

Bu durumda matematik dersi sınavlarından aldığı puanların ortalaması,

$$\overline{X} = \frac{\text{Sayısal verilerin toplamı}}{\text{Veri sayısı}} = \frac{84+78+90}{3} = \frac{252}{3} = 84 \text{ olur.}$$

$x_1 = 84,\ x_2 = 78,\ x_3 = 90,\ \overline{X} = 84$ ve veri sayısı olan $n = 3$ değerleri

$$S = \sqrt{\frac{(x_1-\overline{X})^2+(x_2-\overline{X})^2+(x_3-\overline{X})^2}{n-1}}$$ eşitliğinde yerlerine yazılırsa

$$S = \sqrt{\frac{(84-84)^2+(78-84)^2+(90-84)^2}{3-1}} = \sqrt{\frac{0^2+(-6)^2+6^2}{2}}$$
$$= \sqrt{\frac{0+36+36}{2}}$$
$$= \sqrt{\frac{72}{2}}$$
$$= \sqrt{36}$$
$$= 6 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

Ürün	Gömlek	Kazak	Ceket	Pantolon
Ürün Adedi	18	16	12	18

Yukarıda verilen tablo, bir mağazada bir günde satılan dört farklı ürünün adetlerini göstermektedir.

Buna göre veri grubunun

a) Ortanca (medyan) değerini bulunuz.

b) Tepe değerini (modunu) bulunuz.

c) Açıklığını bulunuz.

ç) Ortalamasını bulunuz.

d) Standart sapmasını bulunuz.

ÇÖZÜM

a) Veri grubu küçükten büyüğe doğru sıralanırsa 12, 16, 18, 18 olur.

Veri sayısı olan 4, çift sayıdır. Bu durumda medyan, veri grubunun ortadaki iki değerinin aritmetik ortalaması olur. Ortadaki iki değer, 16 ile 18 olduğundan medyan $\frac{16+18}{2}=\frac{34}{2}=17$ bulunur.

b) Veri grubunda en çok tekrar eden veri 18 dir. Bu durumda veri grubunun tepe değeri 18 bulunur.

c) Veri grubunun en büyük değeri 18, en küçük değeri 12 dir.

Buna göre veri grubunun açıklığı $18-12=6$ bulunur.

ç) Mağazada bir günde satılan ürünlerin toplamı $18+16+12+18=64$ adettir.
Satılan dört farklı ürünün adetleri verildiğinden veri sayısı 4 olur.
O hâlde veri grubunun ortalaması,

$$\overline{X}=\frac{\text{Sayısal verilerin toplamı}}{\text{Veri sayısı}}=\frac{18+16+12+18}{4}=\frac{64}{4}=16 \text{ bulunur.}$$

d) $x_1=18,\ x_2=16,\ x_3=12,\ x_4=18,\ \overline{X}=16$ ve veri sayısı olan $n=4$ değerleri

$$S=\sqrt{\frac{(x_1-\overline{X})^2+(x_2-\overline{X})^2+(x_3-\overline{X})^2+(x_4-\overline{X})^2}{n-1}}$$ eşitliğinde yerlerine yazılırsa

$$S=\sqrt{\frac{(18-16)^2+(16-16)^2+(12-16)^2+(18-16)^2}{4-1}}$$

$$=\sqrt{\frac{2^2+0^2+(-4)^2+2^2}{3}}$$

$$=\sqrt{\frac{4+0+16+4}{3}}=\sqrt{\frac{24}{3}}=\sqrt{8}\approx 2,8 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

Bir belediyenin Fen İşleri Müdürlüğü, şehirde en çok kaza olan üç tane kavşağı belirlemiştir. Aşağıdaki tabloda bu üç kavşakta son beş ayda gerçekleşen kaza sayıları verilmiştir.

	1. Ay	2. Ay	3. Ay	4. Ay	5. Ay
Emniyet Kavşağı	7	4	4	9	6
Hastane Kavşağı	10	2	1	7	10
Stadyum Kavşağı	7	6	7	6	6

Fen İşleri Müdürlüğü, belirlediği bu beş kavşağa köprü ve alt geçit yaparak kaza sayılarını azaltmayı hedeflemektedir. Yapılacak kavşakların öncelik sıralaması belirlenirken önce ortalama kaza sayısı fazla olana, ortalama aynı ise standart sapması fazla olana bakılacaktır.

Buna göre bu şehirde köprü ve alt geçit yapılacak kavşakların öncelik sırasını belirleyiniz.

ÇÖZÜM

Köprü ve alt geçit yapılacak kavşakların öncelik sırası belirlenirken ilk olarak aritmetik ortalamaya bakılacağından bu kavşaklarda meydana gelen aylık ortalama kaza sayıları hesaplanmalıdır.

Emniyet Kavşağı'nda meydana gelen aylık ortalama kaza sayısı $\overline{X} = \dfrac{7+4+4+9+6}{5} = 6$

Hastane Kavşağı'nda meydana gelen aylık ortalama kaza sayısı $\overline{X} = \dfrac{10+2+1+7+10}{5} = 6$

Stadyum Kavşağı'nda meydana gelen aylık ortalama kaza sayısı $\overline{X} = \dfrac{7+6+7+6+6}{5} = 6{,}4$ olur.

Aylık ortalama kaza sayısı en fazla Stadyum Kavşağı'nda meydana geldiğinden öncelik bu kavşağa verilmelidir.

İkinci öncelikli kavşağı belirlemek için aritmetik ortalaması eşit olan Emniyet ve Hastane Kavşağı'nda meydana gelen kaza sayılarının oluşturduğu veri grubunun standart sapması hesaplanmalıdır.

Emniyet Kavşağı'nda meydana gelen aylık ortalama kaza sayısının oluşturduğu veri grubunun standart sapması $x_1 = 7,\ x_2 = 4,\ x_3 = 4,\ x_4 = 9,\ x_5 = 6,\ \overline{X} = 6$ ve veri sayısı olan $n = 5$ değerleri

$$S = \sqrt{\frac{(x_1-\overline{X})^2+(x_2-\overline{X})^2+(x_3-\overline{X})^2+(x_4-\overline{X})^2+(x_5-\overline{X})^2}{n-1}}$$ eşitliğinde yerlerine yazılırsa

$$S = \sqrt{\frac{(7-6)^2+(4-6)^2+(4-6)^2+(9-6)^2+(6-6)^2}{5-1}}$$
$$= \sqrt{\frac{1^2+(-2)^2+(-2)^2+3^2+0^2}{4}} = \sqrt{\frac{1+4+4+9+0}{4}} = \sqrt{\frac{18}{4}} = \sqrt{\frac{9}{2}}$$ olur.

Hastane Kavşağı'nda meydana gelen aylık ortalama kaza sayısının oluşturduğu veri grubunun standart sapması $x_1 = 10,\ x_2 = 2,\ x_3 = 1,\ x_4 = 7,\ x_5 = 10,\ \overline{X} = 6$ ve veri sayısı olan $n = 5$ değerleri

$$S = \sqrt{\frac{(x_1-\overline{X})^2+(x_2-\overline{X})^2+(x_3-\overline{X})^2+(x_4-\overline{X})^2+(x_5-\overline{X})^2}{n-1}}$$ eşitliğinde yerlerine yazılırsa

$$S = \sqrt{\frac{(10-6)^2+(2-6)^2+(1-6)^2+(7-6)^2+(10-6)^2}{5-1}}$$
$$= \sqrt{\frac{4^2+(-4)^2+(-5)^2+1^2+4^2}{5-1}} = \sqrt{\frac{16+16+25+1+16}{4}} = \sqrt{\frac{74}{4}} = \sqrt{\frac{37}{2}}$$ olur.

Hastane Kavşağı'nda meydana gelen kaza sayılarının oluşturduğu veri grubunun standart sapması daha büyük olduğundan ikinci öncelik bu kavşağa verilmelidir.

ALIŞTIRMALAR

1. 2, 9, 5, 10, 8, 3, 5
Yukarıda verilen veri grubunun

a) Aritmetik ortalamasını bulunuz.
b) Ortanca (medyan) değerini bulunuz.
c) Tepe değerini (modunu) bulunuz.

2. 6, 6, 6, 7, 7, 9, 9, 10, 10

Yukarıda verilen veri grubunun tepe değeri ile ortanca değerinin toplamını bulunuz.

3. 5, 10, 8, 3, x, 14

Yukarıda verilen veri grubunun tepe değeri 10 olduğuna göre veri grubunun medyan (ortanca) değerini bulunuz.

4. 3, 3, 3, 6, 6, 6, 10, 10, 10, x

Yukarıda verilen veri grubunun aritmetik ortalaması 6 olduğuna göre bu veri grubunun tepe değerini bulunuz.

5. 14, 10, 18, 5, x

Yukarıda verilen veri grubunun aritmetik ortalaması 12 olduğuna göre bu veri grubunun ortanca (medyan) değerini bulunuz.

6 – 10. soruları aşağıdaki tabloya göre cevaplayınız.

Ülkeler	Öğrenci Sayısı
Singapur	150
Kanada	120
İspanya	90
Japonya	70
Kore	110

Bir okulun proje ekibi, yapılacak bir projenin hangi ülke ile ortak yapılması konusunda okuldaki öğrencilere anket uygulamıştır. Ankette her öğrenci bir ülke seçmiştir.

6. Okulda yapılan ankete katılan öğrenci sayısını bulunuz.

7. Her bir ülkeyi ortalama kaç öğrencinin tercih ettiğini bulunuz.

8. En çok proje yapılmak istenen ülkenin hangisi olduğunu bulunuz.

9. En az proje yapılmak istenen ülkenin hangisi olduğunu bulunuz.

10. Bu veri grubunun açıklığını bulunuz.

11. 10, 14, x, 20

Yukarıda verilen veri grubunun aritmetik ortalaması 16 olduğuna göre standart sapmasını bulunuz.

11.1.2. VERİLERİN GRAFİKLE GÖSTERİLMESİ

11.1.2.1. GERÇEK HAYAT DURUMLARINI YANSITAN VERİ GRUPLARINI UYGUN GRAFİK TÜRLERİYLE YORUMLAMA

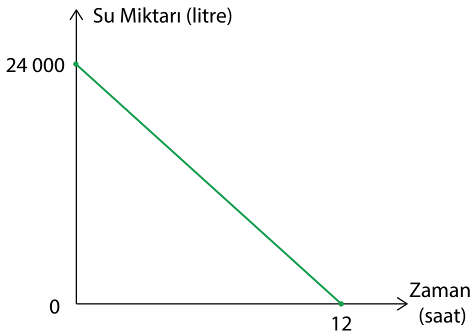
Bir araştırma sonucu elde edilen verilerin çizgi, sütun gibi farklı şekillerde ifade edilmesine *grafik* denir. Grafikler verilerin hızlı, etkin ve doğru bir biçimde yorumlanması, karşılaştırılması ve analiz edilmesinde kullanılan araçlardır.

1. Çizgi Grafiği

Sürekli verilerin yatay ve düşey eksendeki değerlerini işaretleyerek bulunan noktaların düz çizgilerle birleştirilmesi sonucunda oluşan grafik türüne **çizgi grafiği** denir.

Genellikle iki verinin karşılaştırılması ya da bir verinin zamana göre değişimini incelemek için kullanılır.

ÖRNEK



Yanda verilen çizgi grafiği, bir havuzda bulunan suyu boşaltmak için havuzun altında bulunan vana açıldığında havuzdaki 24 000 litre suyun zamana göre değişimini göstermektedir.

Buna göre havuzun altında bulunan vana açıldıktan kaç saat sonra, havuzda 6000 litre su kaldığını bulunuz.

ÇÖZÜM

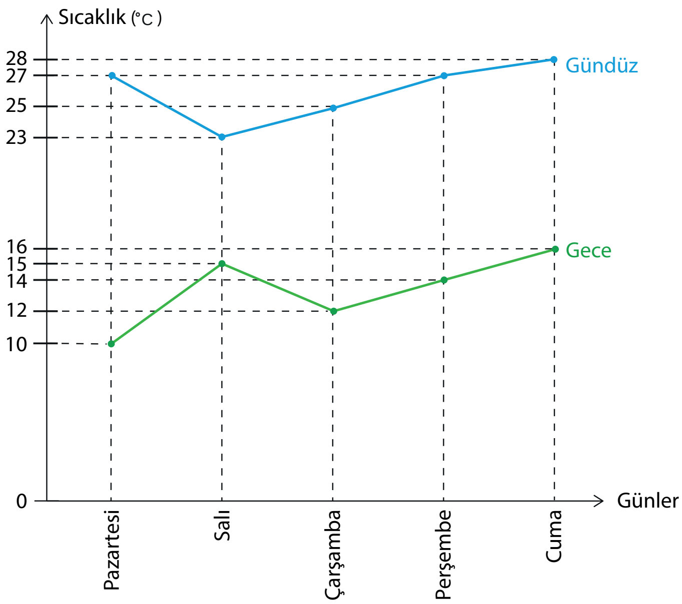
Havuzdaki 24 000 litre su 12 saatte tamamen boşalmaktadır. O hâlde havuzdan 1 saatte,

$\frac{24\,000}{12} = 2000$ litre su boşalır.

24 000 litrelik havuzda 6000 litre su kalması için $24\,000 - 6000 = 18\,000$ litre su boşalmalıdır.

Bu durumda havuzda $\frac{18\,000}{2000} = 9$ saat sonunda 6000 litre su kalır.

ÖRNEK



Yanda verilen çizgi grafiği, bir ilin 5 günlük ortalama sıcaklık değerlerini göstermektedir. Buna göre

a) Gece ile gündüz sıcaklık değerleri farkının en az olduğu günü bulunuz.

b) Gece ile gündüz sıcaklık değerleri farkının en fazla olduğu günü bulunuz.

c) Gündüz günlük ortalama sıcaklık değerinin en az olduğu günü bulunuz.

ç) Gece günlük ortalama sıcaklık değerinin en fazla olduğu günü bulunuz.

d) 5 gün boyunca gündüz ortalama sıcaklık değerini bulunuz.

e) 5 gün boyunca gece ortalama sıcaklık değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

a) Gece ile gündüz sıcaklık değerleri farkının en az olduğu gün, grafikte verilen gece ile gündüz sıcaklık değerlerinin birbirine en yakın olduğu salı günüdür.

b) Gece ile gündüz sıcaklık değerleri farkının en fazla olduğu gün, grafikte verilen gece ile gündüz sıcaklık değerlerinin birbirine en uzak olduğu pazartesi günüdür.

c) Gündüz günlük ortalama sıcaklık değerinin en az olduğu gün $23\ ^\circ\text{C}$ ile salı günüdür.

ç) Gece günlük ortalama sıcaklık değerinin en fazla olduğu gün $16\ ^\circ\text{C}$ ile cuma günüdür.

d) 5 günlük gündüz sıcaklık değerleri toplamı $27 + 23 + 25 + 27 + 28 = 130\ ^\circ\text{C}$ olur.

5 günün sıcaklık değerleri verildiğinden veri sayısı 5 tir.

Bu durumda gündüz ortalama sıcaklık değeri

$$\overline{X} = \frac{\text{Sayısal verilerin toplamı}}{\text{Veri sayısı}} = \frac{27 + 23 + 25 + 27 + 28}{5} = \frac{130}{5} = 26\ ^\circ\text{C} \text{ bulunur.}$$

e) 5 günlük gece sıcaklık değerleri toplamı $10 + 15 + 12 + 14 + 16 = 67\ ^\circ\text{C}$ olur.

5 günün sıcaklık değeri verildiğinden veri sayısı 5 tir.
Bu durumda gece ortalama sıcaklık değeri

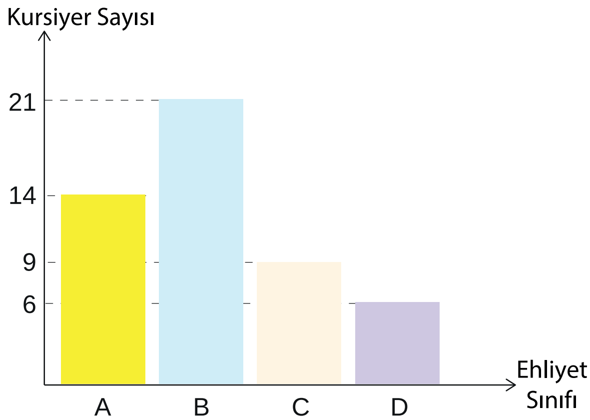
$$\overline{X} = \frac{\text{Sayısal verilerin toplamı}}{\text{Veri sayısı}} = \frac{10 + 15 + 12 + 14 + 16}{5} = \frac{67}{5} = 13{,}4\ ^\circ\text{C} \text{ bulunur.}$$

2. Sütun Grafiği

Veri gruplarını karşılaştırmak amacıyla verilerin dik koordinat sisteminde yatay ya da düşey olacak şekilde sütun ya da çubuk kullanılarak çizildiği grafik türüne **sütun grafiği** denir. Sütun grafiğinde kesikli veriler gösterilir.

ÖRNEK

Ehliyet sınıfları	A	B	C	D
Kurs fiyatları (TL)	2500	3000	4000	3500



Aşağıda verilen tablo bir sürücü kursunun ehliyet sınıflarına göre kurs fiyatlarını, sütun grafiği ise ehliyet sınıflarına göre sürücü kursuna kayıt yaptıran kursiyer sayılarını göstermektedir.
Buna göre sürücü kursunun bir kursiyerden ortalama kazancının ne kadar olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Verilen grafik ve tabloya göre

14 kişi A sınıfı ehliyet almak için iki bin beş yüzer TL,

21 kişi B sınıfı ehliyet almak için üç biner TL,

9 kişi C sınıfı ehliyet almak için dört biner TL,

6 kişi D sınıfı ehliyet almak için üç bin beş yüzer TL sürücü kursuna vermiştir.

Sürücü kursunun kursiyerlerin tamamından kazancı,

$$14 \cdot 2500 + 21 \cdot 3000 + 9 \cdot 4000 + 6 \cdot 3500 = 35\,000 + 63\,000 + 36\,000 + 21000$$
$$= 155\,000 \text{ TL dir.}$$

Toplam kursiyer sayısı $14 + 21 + 9 + 6 = 50$ olduğundan veri sayısı 50 olur.

Bu durumda sürücü kursunun bir kursiyerden ortalama kazancı,

$$\overline{X} = \frac{14 \cdot 2500 + 21 \cdot 3000 + 9 \cdot 4000 + 6 \cdot 3500}{50} = \frac{35\,000 + 63\,000 + 36\,000 + 21000}{50}$$
$$= \frac{155\,000}{50} = 3100 \text{ TL bulunur.}$$

ÖRNEK

Dört kişilik bir ailenin üç günlük tatil için ayırmış oldukları bütçe 12 000 TL dir. Ayırmış oldukları bütçenin %40 ını konaklama, %30 unu gıda, %15 ini ulaşım, %10 unu eğlence ve %5 ini alışveriş giderleri için kullanmışlardır. Buna göre bu ailenin tatil giderlerinin maliyetini gösteren sütun grafiğini çiziniz.

ÇÖZÜM

12 000 TL nin %40 ı; $\dfrac{12\,000 \cdot 40}{100} = \dfrac{480\,000}{100} = 4800$ TL olduğundan konaklama için 4800 TL,

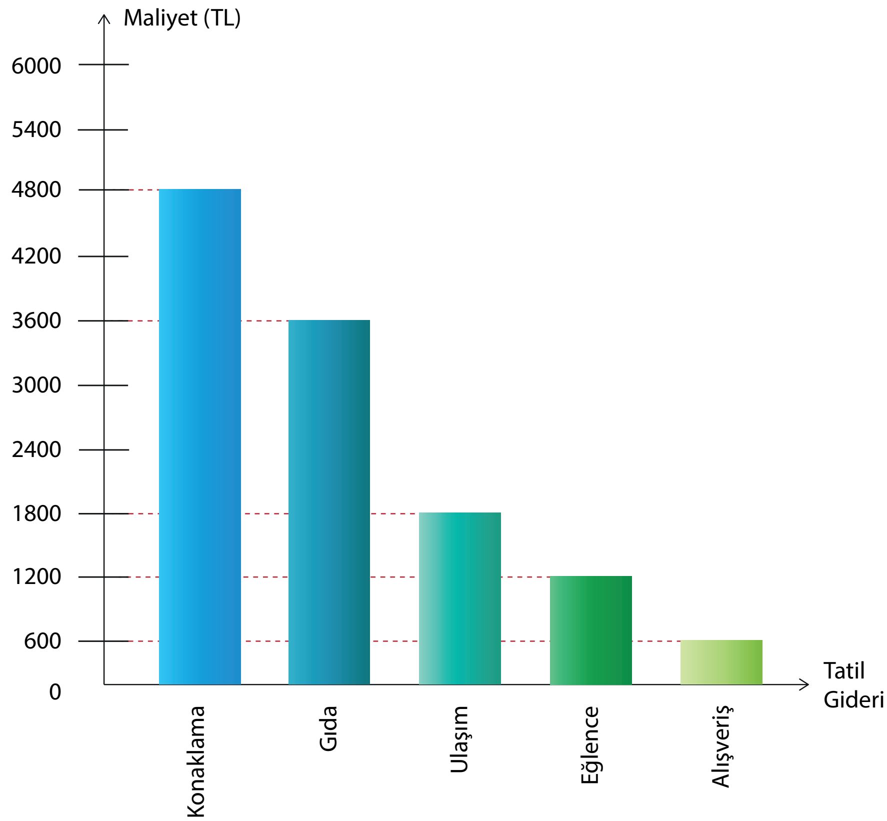
12 000 TL nin %30 u; $\dfrac{12\,000 \cdot 30}{100} = \dfrac{360\,000}{100} = 3600$ TL olduğundan gıda için 3600 TL,

12 000 TL nin %15 i; $\dfrac{12\,000 \cdot 15}{100} = \dfrac{180\,000}{100} = 1800$ TL olduğundan ulaşım için 1800 TL,

12 000 TL nin %10 u; $\dfrac{12\,000 \cdot 10}{100} = \dfrac{120\,000}{100} = 1200$ TL olduğundan eğlence için 1200 TL,

12 000 TL nin %5 i; $\dfrac{12\,000 \cdot 5}{100} = \dfrac{60\,000}{100} = 600$ TL olduğundan alışveriş için 600 TL kullanılmıştır.

Buna göre elde edilen veriler kullanılarak çizilen tatil giderlerinin maliyetini gösteren sütun grafiği aşağıdaki gibi olur.



ÖRNEK

Bugün 820 milyonun üzerinde insanı kronik açlık çekerken, bizler her yıl neredeyse 1,3 milyar ton gıdayı israf ediyoruz. Eğer dünyadaki gıda kaybı ve israfının $\frac{1}{4}$ ünü önleyebilirsek, sadece gıdanın çöpe gitmesini önlemiş değil, aynı zamanda 821 milyon aç insanı da beslemiş oluruz.

(Kaynak: https://ergenekonilkokulu.meb.k12.tr/icerikler/gidani-koru-sofrana-sahip-cik_11193498.html)

Aşağıdaki tabloda bir ilde haftalık israf edilen ekmek miktarları verilmiştir.

Günler	**Pazartesi**	**Salı**	**Çarşamba**	**Perşembe**	**Cuma**	**Cumartesi**	**Pazar**
İsraf Edilen Ekmek Miktarı (bin)	90	80	86	95	74	65	70

Buna göre bu ilde bir hafta boyunca günlük ortalama kaç bin adet ekmeğin israf edilmiş olduğunu bulunuz ve tabloya ait sütun grafiğini bilgi ve işlem teknolojilerinden yararlanarak oluşturunuz.

ÇÖZÜM

Verilen tabloya göre bu ilde bir haftada israf edilen toplam ekmek sayısı,

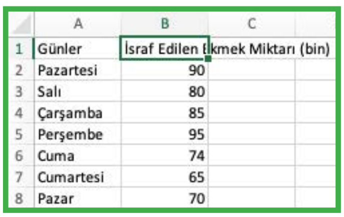
$90+80+86+95+74+65+70=560$ bin olur.

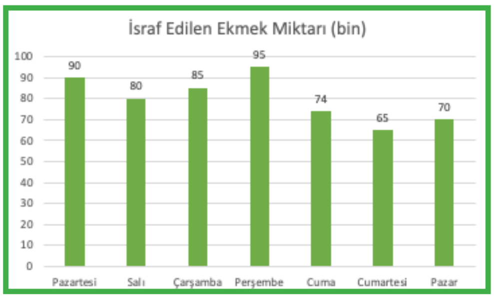
Bir haftada 7 gün olduğundan veri sayısı 7 dir.

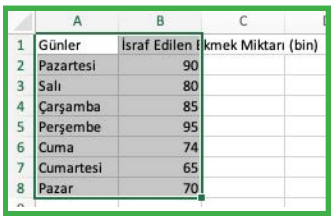
Bu durumda bu ilde bir hafta boyunca günlük ortalama;

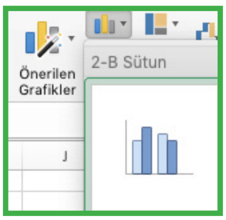
$$\frac{90+80+86+95+74+65+70}{7}=\frac{560}{7}=80 \text{ bin}$$ adet ekmek israf edilmiştir.

- Bir **"Elektronik Tablolama Programı"** sayfası açınız.
- A1 hücresine **"Günler"** yazıp A2 hücresinden A8 hücresine kadar tablodaki günleri yazınız.
- B1 hücresine **"İsraf Edilen Ekmek Miktarı (bin)"** yazıp B2 hücresinden B8 hücresine kadar sırasıyla 90, 80, 86, 95, 74, 65 ve 70 değerlerini yazınız.
- **"Ekle"** menüsünden **"Grafikler"** aracını seçip "**Sütun**" grafiğine tıklandığında sütun grafiği elde edilir.

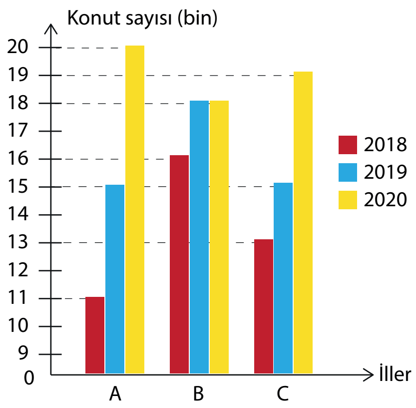








ÖRNEK



Yanda verilen sütun grafiği, kentsel dönüşüm kapsamında A, B ve C illerine 2018, 2019 ve 2020 yıllarında yapılan konut sayılarını göstermektedir. Buna göre

a) En fazla konutun hangi ile yapıldığını bulunuz.

b) 2018 yılında yapılan toplam konut sayısını bulunuz.

c) 2020 yılında yapılan toplam konut sayısının 2018 yılında yapılan toplam konut sayısından kaç fazla olduğunu bulunuz.

ç) 2019 yılında en fazla konutun hangi ile yapılmış olduğunu bulunuz.

d) 2019 yılında illere göre yapılan ortalama konut sayısını bulunuz.

e) C iline yapılan konut sayılarından oluşan veri grubunun açıklığını bulunuz.

f) En fazla konutun hangi yıl yapıldığını bulunuz.

ÇÖZÜM

a) A iline üç yılda yapılan toplam konut sayısı $11+15+20=46$ bin
B iline üç yılda yapılan toplam konut sayısı $16+18+18=52$ bin
C iline üç yılda yapılan toplam konut sayısı $13+15+19=47$ bin
olduğundan en fazla konut B iline yapılmıştır.

b) 2018 yılında A iline 11 bin, B iline 16 bin, C iline 13 bin konut yapılmıştır.
O hâlde 2018 yılında yapılan toplam konut sayısı $11+16+13=40$ bin bulunur.

c) 2020 yılında A iline 20 bin, B iline 18 bin, C iline 19 bin konut yapılmıştır.
O hâlde 2020 yılında yapılan toplam konut sayısı $20+18+19=57$ bin bulunur.
2018 yılında yapılan toplam konut sayısı 40 bin dir. Bu durumda 2020 yılında yapılan toplam konut sayısı, 2018 yılında yapılan toplam konut sayısından $57-40=17$ bin fazladır.

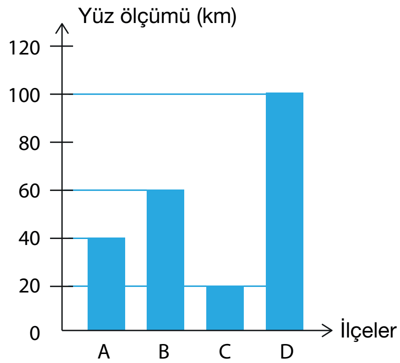
ç) 2019 yılında A iline 15 bin, B iline 18 bin, C iline 15 bin konut yapılmıştır.
O hâlde 2019 yılında en fazla konut B iline yapılmıştır.

d) 2019 yılında A iline 15 bin, B iline 18 bin, C iline 15 bin konut yapılmıştır.
O hâlde 2019 yılında yapılan konut sayısı $15+18+15=48$ bin olur.
Bu durumda $\overline{X}=\dfrac{48}{3}=16$ bin bulunur.

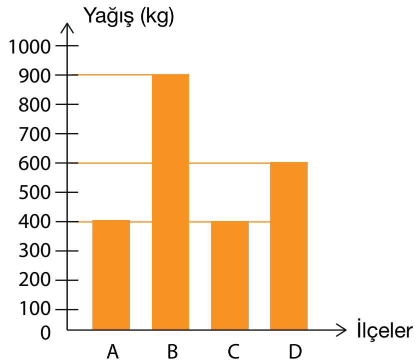
e) C iline 2018 yılında 13 bin, 2019 yılında 15 bin, 2020 yılında 19 bin konut yapılmıştır.
O hâlde C iline en az konut 2018, en fazla konut 2020 yılında yapılmıştır. Bu durumda Açıklık $=19-13=6$ bin bulunur.

f) 2018 yılında toplam 40 bin, 2019 yılında toplam $15+18+15=48$ bin ve 2020 yılında toplam 57 bin konut yapılmıştır. Bu durumda en fazla konut 2020 yılında yapılmıştır.

ÖRNEK



Grafik 1



Grafik 2

Yukarıda Grafik 1, bir ildeki bazı ilçelerin yüz ölçümünü, Grafik 2 ise bu ilçelere düşen yağış miktarını göstermektedir. Buna göre bu ilçelerde kilometrekareye düşen ortalama yağış miktarını gösteren sütun grafiğini çiziniz.

ÇÖZÜM

İlçedeki yağış miktarını, ilçenin yüz ölçümüne oranladığımızda kilometrekareye düşen ortalama yağış miktarı bulunur.

Bu durumda kilometrekareye düşen ortalama yağış miktarı

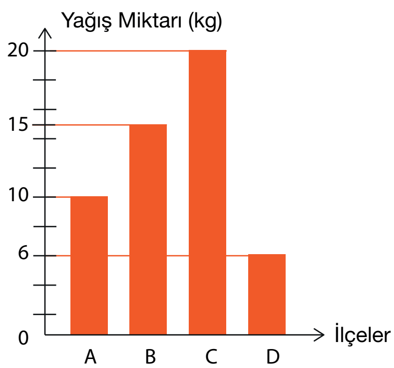
A ilçesi için, yüz ölçümü $40\,km^2$ ve yağış miktarı 400 kg olduğundan $\frac{400}{40} = 10$ kg

B ilçesi için, yüz ölçümü $60\,km^2$ ve yağış miktarı 900 kg olduğundan $\frac{900}{60} = 15$ kg

C ilçesi için, yüz ölçümü $20\,km^2$ ve yağış miktarı 400 kg olduğundan $\frac{400}{20} = 20$ kg

D ilçesi için, yüz ölçümü $100\,km^2$ ve yağış miktarı 600kg olduğundan $\frac{600}{100} = 6\,kg$ bulunur.

Buna göre bu ilçelerde kilometrekareye düşen ortalama yağış miktarını gösteren sütun grafiği aşağıdaki gibi olur.



3. Daire Grafiği

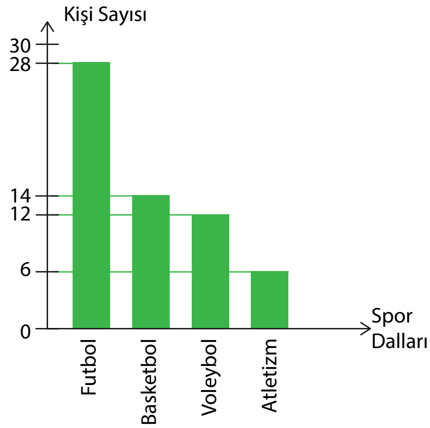
Bir araştırma sonucu elde edilen bütün verilerin orantılı bir şekilde daire dilimi olarak bir daire içerisinde gösterilmesine **daire grafiği** denir. Bir verinin bütün veriler içerisindeki oranını göstermek için kullanılır. Her bir verinin merkez açısı vardır. Verilerin merkez açılarının ölçüleri toplamı 360° dir.

Daire grafiğinde kesikli veriler gösterilir. Daire grafiklerine yönelik sorularda sıklıkla kullanılan merkez açı hesabı için aşağıdaki eşitlik kullanılır.

$$\frac{\text{İstenen veri sayısı}}{\text{Tüm veri sayısı}} = \frac{\text{Daire diliminin merkez açısının ölçüsü}}{360^\circ}$$

ÖRNEK

Yanda verilen sütun grafiği, 60 kişilik bir spor kulübünün faaliyet gösterdiği spor dallarına göre kişi sayısını göstermektedir. Buna göre verilen sütun grafiğindeki verileri daire grafiği ile gösteriniz.



ÇÖZÜM

60 kişilik bir spor kulübünün kişi sayısına ait daire grafiğinin merkez açısının ölçüsü 360° dir. O hâlde her bir kişiye ait daire dilimindeki merkez açısının ölçüsü $\frac{360^\circ}{60} = 6^\circ$ olur.

Bu durumda

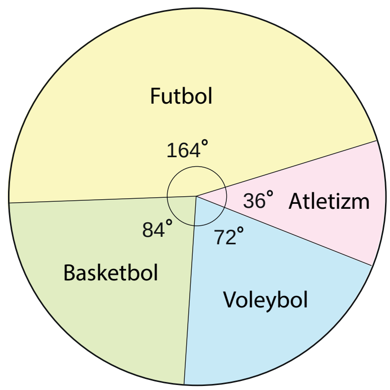
» Futbol dalında faaliyet gösteren kişi sayısına ait daire diliminin merkez açısının ölçüsü $28 \cdot 6^\circ = 168^\circ$,

» Basketbol dalında faaliyet gösteren kişi sayısına ait daire diliminin merkez açısının ölçüsü $14 \cdot 6^\circ = 84^\circ$,

» Voleybol dalında faaliyet gösteren kişi sayısına ait daire diliminin merkez açısının ölçüsü $12 \cdot 6^\circ = 72^\circ$,

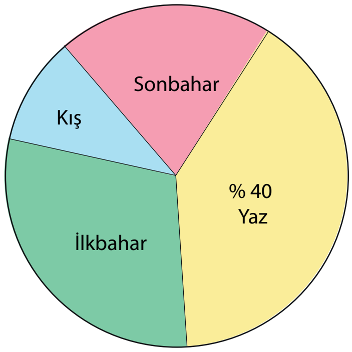
» Atletizm dalında faaliyet gösteren kişi sayısına ait daire diliminin merkez açısının ölçüsü $6 \cdot 6^\circ = 36^\circ$ olur.

Buna göre spor dallarında faaliyet gösteren kişi sayısına ait daire grafiği yandaki gibidir.



ÖRNEK

Yanda verilen daire grafiği, bir yılda bir otele gelen turist sayısının mevsimlere göre dağılımını göstermektedir. Bir yılda otele gelen turist sayılarının %40 ı yaz mevsiminde gelmiştir. İlkbahar mevsiminde otele gelen turist sayısı, yaz mevsiminde otele gelen turist sayısının $\frac{3}{4}$ ü kadardır. Sonbahar mevsiminde otele gelen turist sayısı ise kış mevsiminde otele gelen turist sayısının iki katıdır.



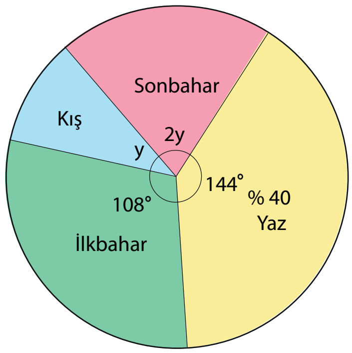
Buna göre sonbahar mevsiminde gelen turist sayısına ait daire diliminin merkez açısının ölçüsünü bulunuz.

ÇÖZÜM

Bir yılda otele gelen turist sayısı oranı %100 dür. Merkez açısının ölçüsü ise 360° dir. Bu durumda yaz mevsiminde otele gelen turist sayısına ait dilimin merkez açısının ölçüsü

$$\frac{40}{100} = \frac{x}{360^\circ} \Rightarrow 100 \cdot x = 40 \cdot 360^\circ$$
$$\Rightarrow \frac{\cancel{100} \cdot x}{\cancel{100}} = \frac{14\,400^\circ}{100}$$
$$\Rightarrow x = 144^\circ \text{ olur.}$$

İlkbahar mevsiminde otele gelen turist sayısı yaz mevsiminde otele gelen turist sayısının $\frac{3}{4}$ ü olduğundan ilkbahar mevsiminde otele gelen turist sayısına ait dilimin merkez açısının ölçüsü $144^\circ \cdot \frac{3}{4} = 108^\circ$ olur. Bu durumda yaz ve ilkbahar mevsiminde otele gelen turist sayılarının merkez açılarının ölçüleri toplamı $144^\circ + 108^\circ = 252^\circ$ olur.



O hâlde sonbahar ve kış mevsiminde otele gelen turist sayılarının merkez açılarının ölçüleri toplamı $360^\circ - 252^\circ = 108^\circ$ olur.

Kış mevsiminde otele gelen turist sayısına ait dilimin merkez açısının ölçüsü y olsun. Bu durumda, sonbahar mevsiminde otele gelen turist sayısına ait daire diliminin merkez açısının ölçüsü $2y$ olur.

O hâlde

$$y + 2y = 108^\circ \Rightarrow 3y = 108^\circ$$
$$\Rightarrow y = 36^\circ \text{ olur.}$$

Buna göre sonbahar mevsiminde otele gelen turist sayısına ait daire diliminin merkez açısının ölçüsü $2y = 2 \cdot 36^\circ = 72^\circ$ bulunur.

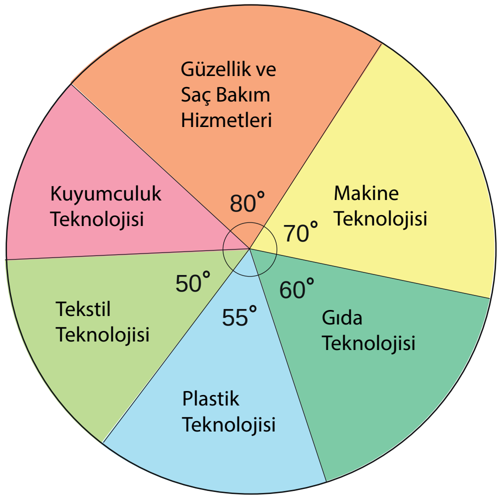
ÖRNEK

Yanda verilen daire grafiği, bir Mesleki Eğitim Merkezine kayıt yaptıran öğrencilerin seçmiş oldukları mesleki alan dağılımlarını göstermektedir. Buna göre

a) Kuyumculuk Teknolojisi alanına kayıt yaptıran öğrenci sayısına ait daire diliminin merkez açısının ölçüsünü bulunuz.

b) Plastik Teknolojisi alanını seçmiş olan öğrenci sayısı, Kuyumculuk Teknolojisi alanını seçen öğrenci sayısından 2 kişi fazla olduğuna göre Makine Teknolojisi alanına kayıt yaptıran öğrenci sayısını bulunuz.

c) Gıda Teknolojisi alanına kayıt yaptıran öğrenci sayısının Güzellik ve Saç Bakım Hizmetleri alanına kayıt yaptıran öğrenci sayısına oranını bulunuz.



ÇÖZÜM

a) Kuyumculuk Teknolojisi alanına kayıt yaptıran öğrenci sayısına ait daire diliminin merkez açısının ölçüsü,

$x = 360^\circ - (80^\circ + 70^\circ + 60^\circ + 55^\circ + 50^\circ) = 360^\circ - 315^\circ = 45^\circ$ bulunur.

b) Plastik Teknolojisi alanına ait daire diliminin merkez açısının ölçüsü 55°, Kuyumculuk Teknolojisi alanına ait daire diliminin merkez açısının ölçüsü 45° dir.

Bu durumda merkez açılarının ölçüleri arasındaki fark $55^\circ - 45^\circ = 10^\circ$ olur ve ölçüsü 10° olan merkez açı 2 kişiye karşılık gelir. Buna göre Makine Teknolojileri alanına ait daire diliminin merkez açısının ölçüsü 70° olduğundan bu alana kayıt yaptıran öğrenci sayısı

10° lik açı — 2 kişi ise
70° lik açı — x kişi olur.
D.O.

$$10^\circ \cdot x = 70^\circ \cdot 2$$
$$\frac{\cancel{10^\circ} \cdot x}{\cancel{10^\circ}} = \frac{140^\circ}{10^\circ}$$
$x = 14$ bulunur.

c) Gıda Teknolojisi alanına kayıt yaptıran öğrenci sayısının Güzellik ve Saç Bakım Hizmetleri alanına kayıt yaptıran öğrenci sayısına oranı, daire dilimindeki merkez açılarının ölçüleri oranına eşittir. Bu oran $\frac{60^\circ}{80^\circ} = \frac{3}{4}$ bulunur.

ÖRNEK

“Sıfır Atık”; israfın önlenmesini, kaynakların daha verimli kullanılmasını, atık oluşum sebeplerinin gözden geçirilerek atık oluşumunun engellenmesi veya minimize edilmesini, atığın oluşması durumunda ise kaynağında ayrı toplanması ve geri kazanımın sağlanmasını kapsayan atık yönetim felsefesi olarak tanımlanan hedeftir.

Atıklar	Plastik Atık	Cam Atık	Metal Atık	Kağıt Atık	Organik Atık
Atık Miktarı (kg)	4	5	3	7	5

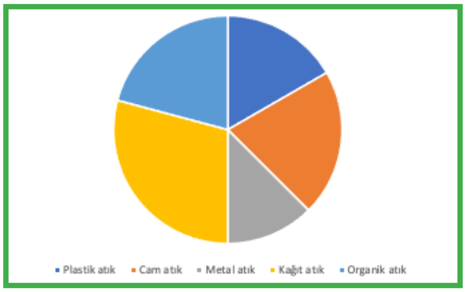
Yukarıdaki tabloda bir ofiste çalışan 20 kişinin bir günlük dönüştürülebilir atık miktarları kg cinsinden verilmiştir. Buna göre kişi başı günlük ortalama dönüştürülebilir atık miktarının kaç kg olduğunu bulunuz ve tabloya ait daire grafiğini bilgi işlem teknolojilerinden yararlanarak oluşturunuz.

ÇÖZÜM

Günlük dönüştürülebilir atık miktarları toplamı $4+5+3+7+5=24$ kg dır.
Kişi başı günlük ortalama atık miktarı sorulduğundan veri sayısı 20 dir. Bu durumda kişi başı günlük ortalama dönüştürülebilir atık miktarı,

$$\overline{X}=\frac{\text{Sayısal verilerin toplamı}}{\text{Veri sayısı}}=\frac{4+5+3+7+5}{20}=\frac{24}{20}=\frac{12}{10}=1{,}2\ \text{kg bulunur.}$$

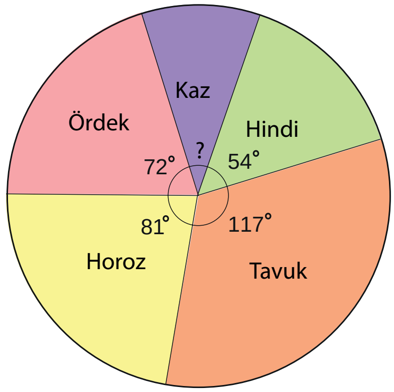
- Bir **“Elektronik Tablolama Programı”** sayfası açınız.
- A1 hücresine **“Atıklar”** yazdıktan sonra A2 hücresinden A6 hücresine kadar tabloda verilen atıkları sırasıyla yazınız.
- B1 hücresine **“Atık Miktarı (kg)”** yazdıktan sonra B2 hücresinden B6 hücresine kadar sırasıyla 4, 5, 3, 7 ve 5 değerlerini yazınız.
- **“Ekle”** aracını seçip **“Pasta”** ya tıklandığında daire grafiği elde edilecektir.



ÖRNEK

Yanda verilen daire grafiği bir kümeste bulunan hayvanların türlerine göre dağılımını göstermektedir.
Kümeste toplam 80 hayvan olduğuna göre

a) Kaz sayısına ait dilimin merkez açısının ölçüsünün kaç derece olduğunu bulunuz.
b) Kümesteki tavuk sayısının horoz sayısından kaç fazla olduğunu bulunuz.
c) Kümesteki hindi sayısını bulunuz.
ç) 7 ördek satıldığına göre kümeste kaç ördek kaldığını bulunuz.
d) Kaz sayısının ördek sayısına oranını bulunuz.



ÇÖZÜM

a) Kaz sayısına ait dilimin merkez açısının ölçüsü

$x = 360° - (54° + 117° + 81° + 72°) = 360° - 324° = 36°$ bulunur.

b) Tavuk sayısına ait dilimin merkez açısının ölçüsü $117°$ ve horoz sayısına ait dilimin merkez açısının ölçüsü $81°$ olduğundan tavuk sayısının merkez açısının ölçüsü, horoz sayısının merkez açısının ölçüsünden $117° - 81° = 36°$ fazladır.

Tavuk sayısı, horoz sayısından x fazla olsun. Bu durumda

$$\frac{x}{80} = \frac{36°}{360°} \Rightarrow 360° \cdot x = 80 \cdot 36°$$
$$\Rightarrow \frac{\cancel{360°} \cdot x}{\cancel{360°}} = \frac{2880°}{360°}$$
$$\Rightarrow x = 8 \text{ bulunur.}$$

c) Kümesteki hindi sayısı y olsun. Hindi sayısına ait dilimin merkez açısının ölçüsü $54°$ olduğundan

$$\frac{y}{80} = \frac{54°}{360°} \Rightarrow 360° \cdot y = 80 \cdot 54°$$
$$\Rightarrow \frac{\cancel{360°} \cdot y}{\cancel{360°}} = \frac{4320°}{360°}$$
$$\Rightarrow y = 12 \text{ bulunur.}$$

ç) Kümesteki ördek sayısı z olsun. Ördek sayısına ait dilimin merkez açısının ölçüsü $72°$ olduğundan

$$\frac{z}{80} = \frac{72°}{360°} \Rightarrow 360° \cdot z = 80 \cdot 72°$$
$$\Rightarrow \frac{\cancel{360°} \cdot z}{\cancel{360°}} = \frac{5760°}{360°}$$
$$\Rightarrow z = 16 \text{ bulunur.}$$

7 ördek satıldığından kümeste $16 - 7 = 9$ ördek kalır.

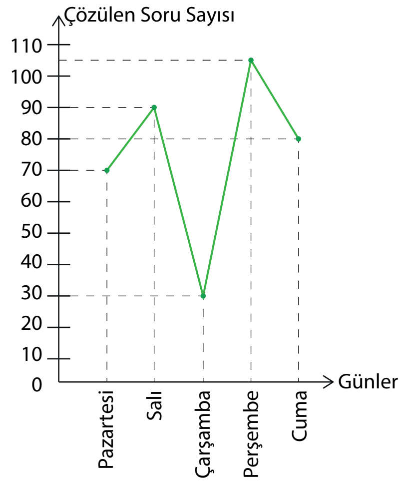
d) Kaz sayısının ördek sayısına oranı, daire dilimindeki merkez açılarının ölçüleri oranına eşittir.

Bu durumda

$$\frac{\text{Kaz sayısı}}{\text{Ördek sayısı}} = \frac{36°}{72°} = \frac{1}{2} \text{ bulunur.}$$

ALIŞTIRMALAR

1 – 4. soruları aşağıdaki çizgi *grafiğine* göre cevaplayınız.



Yukarıdaki *grafik* Deniz'in hafta içi günlerde çözdüğü soru sayısını göstermektedir. Deniz hafta içi günlerde günlük ortalama 75 soru çözmüştür. Buna göre Deniz'in

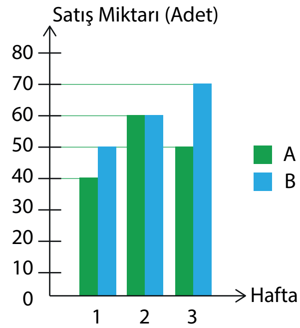
1. Perşembe günü çözdüğü soru sayısını bulunuz.

2. En az hangi gün soru çözdüğünü bulunuz.

3. En fazla hangi gün soru çözdüğünü bulunuz.

4. Perşembe günü çözdüğü soru sayısının, çarşamba günü çözdüğü soru sayısından kaç fazla olduğunu bulunuz.

5 – 9. soruları aşağıdaki sütun *grafiğine* göre cevaplayınız.



Yukarıdaki sütun *grafiğinde* bir markette bulunan A ve B ürünlerinin üç hafta boyunca haftalara göre satış miktarları gösterilmiştir. Buna göre

5. A ürününün kaçıncı haftada en fazla satıldığını bulunuz.

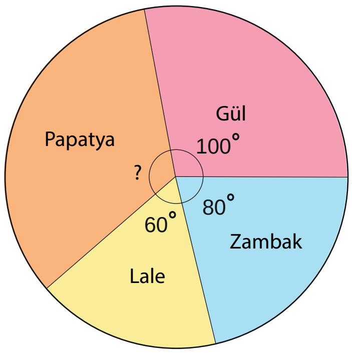
6. A ürününden haftalık ortalama kaç adet satıldığını bulunuz.

7. B ürününden haftalık ortalama kaç adet satıldığını bulunuz.

8. Hangi ürünün kaç adet fazla satıldığını bulunuz.

9. A ürününün üç haftalık satış adetlerinden oluşan veri grubunun standart sapmasını bulunuz.

10 – 13. soruları aşağıdaki daire *grafiğine* göre cevaplayınız.



Grafik: Bir bahçedeki çiçeklerin dağılımı

Yukarıda verilen daire *grafiği*, bir bahçedeki çiçeklerin türlerine göre sayılarının dağılımlarını göstermektedir. Bu bahçede toplam 720 adet çiçek olduğuna göre

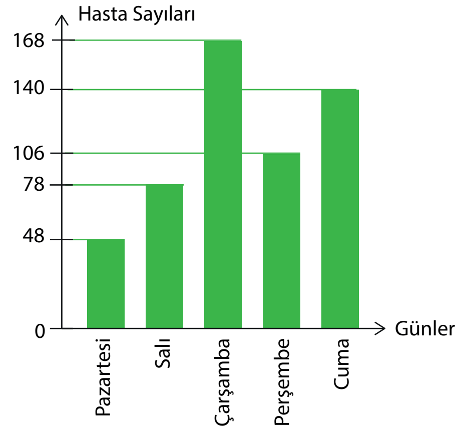
10. Papatya sayısının merkez açısının kaç derece olduğunu bulunuz.

11. Kaç adet gül olduğunu bulunuz.

12. Lâle sayısının zambak sayısına oranını bulunuz.

13. Papatya sayısının zambak sayısından kaç fazla olduğunu bulunuz.

14 – 17. soruları aşağıdaki sütun grafiğine göre cevaplayınız.



Yukarıdaki *grafikte* bir hastanenin göz polikliniğine aralık ayının ilk haftasında, hafta içi günlerde muayeneye gelen hasta sayıları verilmiştir. Buna göre

14. Günlere göre muayeneye gelen hasta sayılarından oluşan veri grubunun açıklığını bulunuz.

15. Veriler daire grafiğinde gösterildiğinde çarşamba günü muayeneye gelen hasta sayısına karşılık gelen daire diliminin merkez açısının ölçüsü kaç derecedir? Bulunuz.

16. Hafta içi günlerde muayeneye gelen günlük ortalama hasta sayısını bulunuz.

17. Muayeneye pazartesi ve salı günü gelen toplam hasta sayısının çarşamba günü gelen hasta sayısına oranını bulunuz.

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

A) 1-5. cümlelerde boş bırakılan yerlere uygun sözcükleri ya da değerleri yazınız.

1. Bir büfede satılan gazeteye ait beş günlük satış adetleri sırasıyla 11, 7, 8, 14, 5 olduğuna göre büfede bu gazeteden günlük ortalama .... adet satılmıştır.

2. Bir çiçekte her gün yeni çıkan tomurcuk sayıları sırasıyla 4, 5, 2, 4, 1, 2 adet olduğuna göre bu veri grubunda .... ortanca değerdir.

3. 13, 22, 13, 17, 13, 22, 17 şeklinde verilen veri grubunda .... tepe değerdir.

4. Bir ilde haftalık hava sıcaklık değerleri sırasıyla 13, 7, 4, 8, 10, 15, 16 olduğuna göre sıcaklık değerlerinden oluşan veri grubunun açıklığı .... derecedir.

5. 85, 85, 85 şeklinde verilen veri grubunun standart sapma değeri .... dır.

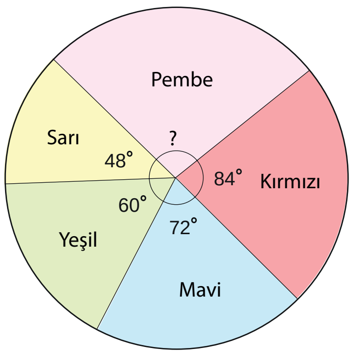
B) 6. soruda tablo içerisinde verilen veri gruplarını tabloda istenenlere uygun şekilde doldurunuz.

6.

Veri grubu	Aritmetik ortalama	Ortanca (Medyan)	Tepe değer (Mod)	Açıklık
7, 7, 8, 8, 8, 14, 18				
2, 2, 5, 5, 7, 7, 10, 10				
4, 6, 11, 12, 12, 12, 14, 14, 14				

C) 7 - 10. soruları aşağıda verilen bilgilere göre cevaplayınız.

Yanda verilen daire grafiği bir resim yarışmasında kullanılan yağlı boyaların dağılımlarını göstermektedir.
Buna göre



7. Resim yarışmasında mavi ve sarı yağlı boyalardan toplam 20 adet kullanıldığına göre kırmızı yağlı boyadan kaç adet kullanıldığını bulunuz.

8. Kullanılan kırmızı yağlı boya sayısının yeşil yağlı boya sayısından kaç fazla olduğunu bulunuz.

9. Resim yarışmasında en az kullanılan rengin hangi renk olduğunu ve bu renkten kaç adet kullanıldığını bulunuz.

10. Yarışmada kullanılan toplam yağlı boya sayısının pembe yağlı boya sayısından kaç fazla olduğunu bulunuz.

Ç) 11 - 33. çoktan seçmeli soruların doğru seçeneğini işaretleyiniz.

11. 1, 3, 3, 5, 6, 7, 7, 10

Yukarıda verilen veri grubunun tepe değeri (modu) kaçtır?

A) 3 B) 7 C) 3 ve 7 D) 10 E) Yoktur

12. 2, 2, 3, 3, 7, 7, 9, x

Yukarıda verilen veri grubunun tepe değeri olmadığına göre x in değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2 B) 3 C) 7 D) 9 E) 10

13. 23, x, 19, 15, 27, 5, 33

Yukarıda verilen veri grubunun ortancası (medyanı) 21 olduğuna göre x kaçtır?

A) 19 B) 20 C) 21 D) 22 E) 23

14. 2, 3, 5, 7, 9, 10 veri grubu veriliyor.
Buna göre;

I. Ortanca değeri 6 dır.
II. Aritmetik ortalaması 6 dır.
III. Tepe değeri 6 dır.

ifadelerinden hangileri doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) II ve III D) I ve II E) I, II ve III

15. 2, 5, 8, 3, 11, x
Veri grubunun aritmetik ortalaması 6 olduğuna göre ortanca değeri kaçtır?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

16. 2, 8, 12, 17, x

Yukarıda küçükten büyüğe doğru sıralanmış olarak verilen veri grubunun açıklığı 19 olduğuna göre aritmetik ortalaması aşağıdaki değerlerden hangisidir?

A) 4 B) 9 C) 12 D) 18 E) 21

17.

Ürünler	Satılan Ürün Miktarı (kg)
Biber	60
Domates	85
Havuç	45
Patates	100
Patlıcan	
Soğan	120

Yukarıdaki tabloda bir manavdaki bazı ürünlerin bir haftada satılan miktarları kilogram cinsinden verilmiştir. Manavda bir haftada en az satılan ürün patlıcandır.

Veri grubunun açıklığı 90 olduğuna göre manavda bir haftada kaç kg patlıcan satılmıştır?

A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 30

18. Bir okulun 11. sınıflarının matematik dersine ait notlarının aritmetik ortalamaları ve standart sapmaları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

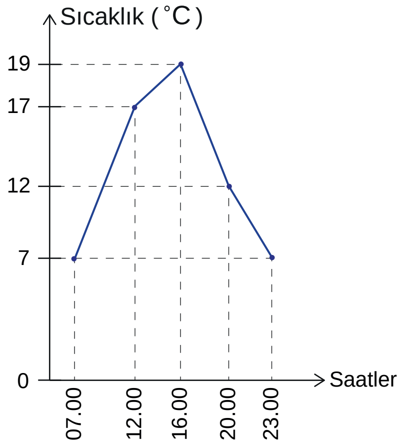
Sınıf	Aritmetik Ortalama	Standart Sapma
11-A	88	5
11-B	85	4
11-C	81	5
11-D	88	3
11-E	80	3

Bu okulda en başarılı sınıf, önce aritmetik ortalamaya, aritmetik ortalama ile belirlenememiş ise notların aritmetik ortalamaya yakın olanına göre seçilecektir.

Buna göre matematik dersinde en başarılı sınıf hangisidir?

A) 11 – A B) 11 – B C) 11 – C
D) 11 – D E) 11 – E

19.



Yukarıdaki çizgi grafiğinde bir ilde gün içinde sıcaklığın bazı saatlere göre değişimi verilmiştir.

Buna göre aşağıda verilen bilgilerden hangisi doğrudur?

A) En yüksek sıcaklık değeri 17°C dir.
B) En yüksek ve en düşük sıcaklık değerleri farkı 12°C dir.
C) Veri grubunun tepe değeri 12°C dir.
D) Ortalama sıcaklık değeri 12°C dir.
E) Ortalama sıcaklık değerine en yakın sıcaklık değeri saat 12.00 de olmuştur.

20. Bir satış personelinin üç günde sattığı ürün miktarları sırasıyla 36, 28 ve 32 adettir. Bu veri grubunun standart sapması hesaplanırken aşağıdaki adımlar takip ediliyor.

1. adım $\overline{X} = \dfrac{36+28+32}{3} = \dfrac{96}{3} = 32$

2. adım $(36-32)^2 = 4^2 = 16$
$(28-32)^2 = (-4)^2 = 16$
$(32-32)^2 = 0^2 = 0$

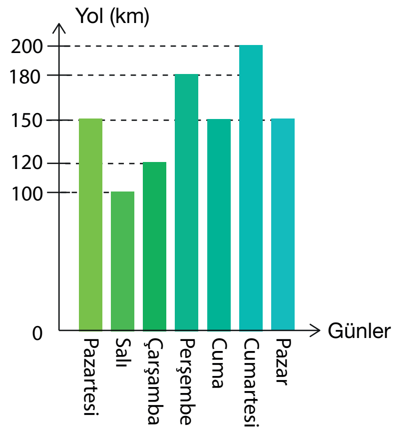
3. adım $\dfrac{16+16+0}{3-1} = \dfrac{32}{2} = 16$

4. adım Standart sapma $= \sqrt{16} = 4$

Buna göre varsa kaçıncı adımda hata yapılmıştır?

A) 1. adım B) 2. adım C) 3. adım
D) 4. adım E) Hata yapılmamıştır.

21.



Yukarıdaki sütun grafiği bir leylek sürüsünün bir haftalık göç sürecinde günlük olarak uçtukları yolu kilometre cinsinden göstermektedir.

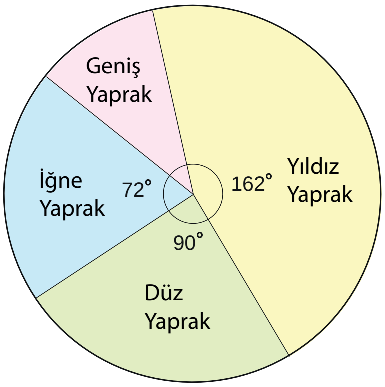
Buna göre aşağıda verilen bilgilerden hangisi yanlıştır?

A) Leylek sürüsü bir haftada toplam 1050 km yol almıştır.
B) Günlük ortalama 150 km yol gitmişlerdir.
C) En çok tekrar eden veri 150 dir.
D) Veri grubunun açıklığı 50 dir.
E) Cumartesi günü pazar gününe göre 50 km daha fazla yol almışlardır.

22. Aşağıda verilen veri gruplarından hangisinin standart sapması en küçüktür?

A) 5, 10, 15 B) 25, 25, 25 C) 25, 30, 35
D) 2, 4, 6 E) 2, 8, 14

23.



Yukarıda verilen daire grafiği bir bahçede bulunan 100 adet ağacın yaprak çeşitlerine göre dağılımlarını göstermektedir.

Buna göre aşağıda verilen bilgilerden hangisi <u>yanlıştır</u>?

A) Geniş yapraklı ağaçların daire diliminin merkez açısının ölçüsü 36° dir.

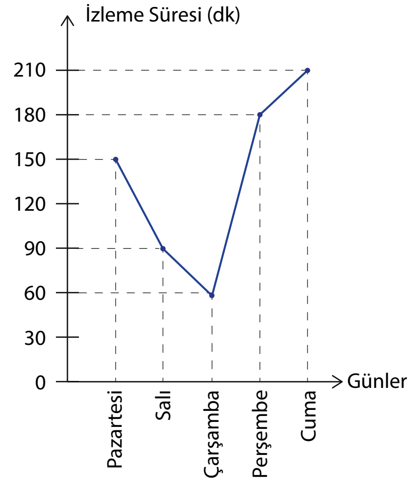
B) Düz yapraklı ağaç sayısı, iğne yapraklı ağaç sayısından 5 fazladır.

C) İğne yapraklı ağaç sayısı, geniş yapraklı ağaç sayısının 2 katıdır.

D) Bahçede en fazla bulunan ağaç yıldız yapraklı ağaçtır.

E) Geniş yapraklı ağaç sayısının düz yapraklı ağaç sayısına oranı $\frac{1}{5}$ tir.

24-28. soruları aşağıdaki çizgi grafiğine göre cevaplayınız.



Yukarıda verilen çizgi grafiği Esra'nın beş gün boyunca televizyon izleme süresinin değişimini göstermektedir.

24. Esra'nın beş gün boyunca günlük ortalama televizyon izleme süresi kaç dakikadır?

A) 114 B) 120 C) 126
D) 132 E) 138

25. Televizyon izleme sürelerinden oluşan veri grubunun ortanca değeri kaçtır?

A) 30 B) 60 C) 90
D) 120 E) 150

26. Televizyon izleme sürelerinden oluşan veri grubunun varsa tepe değeri kaçtır?

A) 60 B) 90 C) 120
D) 150 E) yoktur

27. Esra'nın <u>en az</u> televizyon izlediği gün hangisidir?

A) Pazartesi B) Salı C) Çarşamba
D) Perşembe E) Cuma

28. Televizyon izleme sürelerinden oluşan veri grubunun açıklığı kaçtır?

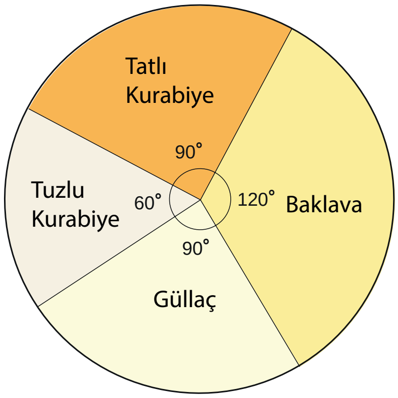
A) 90 B) 120 C) 150
D) 160 E) 180

29-31. soruları aşağıdaki tablo ve grafiğe göre cevaplayınız.

Aşağıdaki tabloda bir pastanede satılan bazı ürünlerin kilogram (kg) fiyatları verilmiştir.

Ürün	Baklava	Güllaç	Tatlı Kurabiye	Tuzlu Kurabiye
Fiyat	60	40	25	20

Aşağıdaki daire grafiğinde ise tabloda verilen pastanedeki ürünlerin bir haftada satılan miktarlarının dağılımı gösterilmektedir. Pastanede bir haftada toplam 40 kg baklava satılmıştır.



29. Pastanenin tuzlu kurabiyeden bir haftada elde ettiği kazanç kaç TL dir?

A) 400 B) 500 C) 600 D) 700 E) 800

30. Pastanede bir haftada güllacın satışından elde edilen kazanç, tatlı kurabiyenin satışından elde edilen kazançtan kaç TL fazladır?

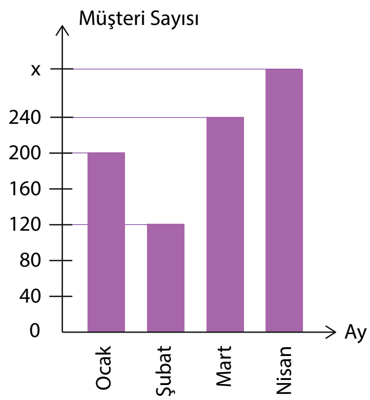
A) 150 B) 300 C) 450 D) 600 E) 750

31. Pastanenin bir haftada baklava satışından elde ettiği kazanç tuzlu kurabiyeden elde ettiği kazançtan kaç TL fazladır?

A) 600 B) 1200 C) 1800 D) 2000 E) 3000

32 ve 33. soruları aşağıdaki sütun grafiğine göre cevaplayınız.

Aşağıda verilen sütun grafiği bir kuaföre yılın ilk dört ayında gelen aylık müşteri sayılarını göstermektedir.



32. Verilen dört ayda kuaföre gelen aylık ortalama müşteri sayısı 215 olduğuna göre nisan ayında kuaföre gelen müşteri sayısı kaçtır?

A) 280 B) 300 C) 320 D) 340 E) 360

33. Kuaföre şubat ayında gelen müşteri sayısı, ocak ayında gelen müşteri sayısının yüzde kaçıdır?

A) 60 B) 50 C) 40 D) 30 E) 20

11.2. SAYMA VE OLASILIK

KAZANIMLAR

11.2.1. SIRALAMA VE SEÇME

11.2.2. BASİT OLAYLARIN OLASILIKLARI

TERİMLER VE KAVRAMLAR

Toplama yöntemi, çarpma yöntemi, faktöriyel, permütasyon, tekrarlı permütasyon, kombinasyon, örnek uzay, olay, deney, çıktı, kesin olay, imkânsız olay, ayrık olay, ayrık olmayan olay, bir olayın tümleyeni, olasılık

HAZIRLIK ÇALIŞMALARI

1. Adımsayar özelliğine sahip akıllı cihazların gün içinde kaç adım attığımızı nasıl hesapladığını düşününüz.
2. Rakamları farklı iki basamaklı kaç sayı yazılabileceğini düşününüz.
3. 4 farklı kitabı bir rafa yan yana kaç farklı şekilde dizebileceğinizi düşününüz.
4. 5 arkadaşınızdan 2 arkadaşınızı kaç farklı şekilde seçebileceğinizi düşününüz.
5. Rakamlardan oluşan 5 haneli kaç farklı şifre oluşturabileceğinizi düşününüz.
6. Bir madeni paranın arka arkaya 2 kez atılmasında hangi durumların olabileceğini düşününüz.

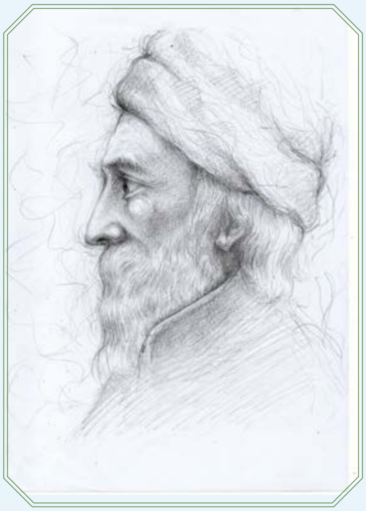
11.2.1.1. TOPLAMA VE ÇARPMA YÖNTEMLERİNİ KULLANARAK SAYMA

Sâbit İbn Kurrâ

İslam matematiğinin oluşum dönemine katkıda bulunan Harranlı matematikçilerin başında gelmektedir. Sâbit İbn Kurrâ felsefe, matematik, astronomi, tıp ve doğa bilimleri alanında tercüme ve telif eserler vermiştir.

Sâbit İbn Kurrâ'nın İslam matematiğine katkılarını üç aşamada özetlemek mümkündür: Birinci aşama, Yunan matematiğinin önemli eserlerini Arapça'ya çevirmesi veya daha önce yapılan tercümeleri tashih etmesidir. İkinci aşama, Sâbit İbn Kurrâ'nın tercüme ve tashihleri vasıtasıyla Arapça bir matematik dilinin oluşması konusundaki katkılarıdır. Sâbit İbn Kurrâ'nın İslam matematiğine yaptığı üçüncü aşamadaki katkıları ise matematiğin aritmetik (sayılar teorisi), cebir, geometri, koni kesitleri ve trigonometri gibi alanlarında yazdığı özgün eserlerdir. Bilhassa sayı kavramının pozitif reel sayıları içerecek biçimde genişletilmesi konularındaki çalışmaları kalıcı izler bırakmıştır.

Kaynakça: İslam Ansiklopedisi, Cilt 35, Sayfa: 353



Görsel 2.1: Sabit İbn Kurrâ

BİRE BİR EŞLEME YOLUYLA SAYMA

Bir kümenin elemanları ile pozitif tam sayılar kümesinin elemanları arasında bire bir eşleme yaparak verilen kümenin eleman sayısını bulma işlemine **bire bir eşleme yoluyla sayma** denir. Kümenin son elemanı ile eşleşen pozitif tam sayı kümenin eleman sayısı olur.

ÖRNEK

BALIKESİR kelimesinin harflerinden oluşan kümenin eleman sayısını bire bir eşleme yoluyla bulunuz.

ÇÖZÜM

BALIKESİR kelimesinin harflerinden oluşan küme $T = \{B, A, L, I, K, E, S, İ, R\}$ ve $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, ...\}$ kümesinin elemanları ile bire bir eşlenirse

B ile 1, A ile 2, L ile 3, I ile 4, K ile 5, E ile 6, S ile 7, İ ile 8 ve R ile 9 eşleşmiş olur. O hâlde $s(T) = 9$ bulunur.

TOPLAMA YOLUYLA SAYMA

A ile B sonlu ve ayrık iki küme olsun. Bu iki kümenin birleşim kümesinin eleman sayısını bulma işlemine **toplama yoluyla sayma** denir.
Ayrık kümelerde birleşim kümelerinin eleman sayısı $s(A \cup B) = s(A) + s(B)$ ile hesaplanır.

ÖRNEK

Ozan'ın farklı 3 tişörtü ve farklı 4 gömleği vardır. Buna göre Ozan'ın bir tane giysiyi kaç farklı şekilde seçebileceğini bulunuz.

Görsel 2.2

ÇÖZÜM

Ozan, 3 tişörtten bir tanesini 3 farklı şekilde ve 4 gömlekten bir tanesini 4 farklı şekilde seçebileceğinden bir tane giysiyi $3 + 4 = 7$ farklı şekilde seçebilir.

ÖRNEK

Bir şirkette 28 makine, 12 elektrik ve 10 bilgisayar mühendisi çalışmaktadır. Buna göre bu şirkette kaç mühendisin çalıştığını bulunuz.

ÇÖZÜM

Şirkette çalışan makine, elektrik ve bilgisayar mühendislerinin oluşturdukları kümeler ayrık kümeler olduğundan şirketteki mühendis sayısı $28 + 12 + 10 = 50$ olarak bulunur.

ÇARPMA YOLUYLA SAYMA

A ve B boş kümeden farklı, sonlu iki küme olmak üzere $A \times B$ kümesinde oluşan sıralı ikililerin sayısını bulma işlemine **çarpma yoluyla sayma** veya **saymanın temel ilkesi** denir.
$A \times B$ kümesinin eleman sayısı $\mathbf{s(A \times B) = s(A) \cdot s(B)}$ ile hesaplanır.

ÖRNEK

Tufan'ın farklı 3 pantolonu ve farklı 4 gömleği vardır. Buna göre Tufan'ın bir pantolon ve bir gömleği kaç farklı şekilde seçebileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

I. yol: Tufan birinci pantolonu ile 4 gömleğini 4 farklı yolla, ikinci pantolonu ile 4 gömleğini 4 farklı yolla ve üçüncü pantolonu ile 4 gömleğini 4 farklı yolla seçer. O hâlde Tufan seçimini $4+4+4=12$ farklı yolla yapabilir.

II. yol: Tufan 3 pantolonundan bir tanesini 3 farklı şekilde ve 4 gömleğinden bir tanesini 4 farklı şekilde seçebildiğinden bir pantolon ve bir gömleği $3 \cdot 4 = 12$ farklı şekilde seçebilir.

ÖRNEK

Bir tiyatro salonunda 25 sıra ve her bir sırada 20 oturma yeri vardır. Buna göre bu tiyatro salonunun kaç kişilik olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Tiyatro salonunda 25 sıra olduğundan ve her bir sırada da 20 oturma yeri bulunduğundan tiyatro salonunun $25 \cdot 20 = 500$ kişilik olduğu bulunur.

ÖRNEK

20 kişilik bir sınıftan bir başkan ve bir başkan yardımcısının kaç farklı şekilde seçilebileceğini bulunuz.

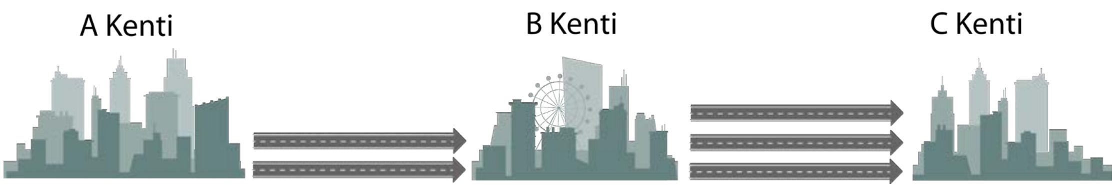
ÇÖZÜM

20 kişilik bir sınıftan bir başkan 20 farklı şekilde seçilebilir. Kalan 19 kişiden ise bir başkan yardımcısı 19 farklı şekilde seçilebilir. Buna göre bir başkan ve bir başkan yardımcısı $20 \cdot 19 = 380$ farklı şekilde seçilebilir.

ÖRNEK

A kentinden B kentine 2 farklı yoldan, B kentinden C kentine 3 farklı yoldan gidilebilmektedir. A kentinden C kentine gitmek isteyen bir kişinin B kentine uğramak koşuluyla kaç farklı biçimde gidebileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

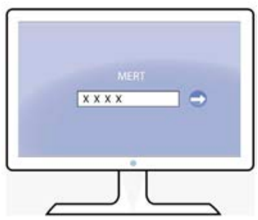


Görsel 2.3

Yukarıdaki şekilde görüldüğü gibi A kentinden B kentine 2 farklı yol olduğundan 2 seçenek, B kentinden C kentine 3 farklı yol olduğundan 3 seçenek vardır. Buna göre A kentinden C kentine $2 \cdot 3 = 6$ farklı biçimde gidilebilir.

ÖRNEK

Mert, bilgisayarı için 4 rakamlı bir açılış şifresi oluşturmak istiyor. Mert'in kaç farklı şifre oluşturabileceğini bulunuz.



Görsel 2.4

ÇÖZÜM

Mert 0,1,2,3,4,5,6,7,8 ve 9 rakamlarını kullanabileceğinden dört rakamlı şifrenin birinci rakamı için 10 seçenek, ikinci rakamı için 10 seçenek, üçüncü rakamı için 10 seçenek ve dördüncü rakamı için 10 seçenek vardır.

Birinci Rakam	*İkinci Rakam*	*Üçüncü Rakam*	*Dördüncü Rakam*
10	10	10	10

Bu durumda $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10\,000$ tane farklı şifre oluşturulabilir.

ÖRNEK

$A = \{1,2,3,4,5\}$ kümesinin elemanları kullanılarak üç basamaklı kaç farklı doğal sayı yazılabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

Üç basamaklı bir doğal sayının yüzler basamağı için 5 seçenek, onlar basamağı için 5 seçenek ve birler basamağı için 5 seçenek vardır.

Yüzler Basamağı	*Onlar Basamağı*	*Birler Basamağı*
5	5	5

Bu durumda $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ farklı doğal sayı yazılabilir.

ÖRNEK

$A = \{1,2,3,4,5\}$ kümesinin elemanlarını kullanarak 200 ile 400 arasında kaç farklı doğal sayının yazılabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

Yazılabilecek üç basamaklı doğal sayıların 200 ile 400 arasında olması için yüzler basamağına 2 ve 3 rakamlarından herhangi biri gelmelidir. Diğer basamaklara ise A kümesindeki her eleman yazılabilir.

Yüzler Basamağı	*Onlar Basamağı*	*Birler Basamağı*
2	5	5

$\{2,3\}$

Bu durumda $2 \cdot 5 \cdot 5 = 50$ farklı doğal sayı yazılabilir.

ÖRNEK

$A = \{1,2,3,4,5\}$ kümesinin elemanları kullanılarak rakamları farklı üç basamaklı kaç farklı doğal sayının yazılabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

Üç basamaklı bir doğal sayının yüzler basamağı için 5 seçenek, kullanılan rakam tekrar kullanılmayacağından onlar basamağı için 4 seçenek ve kullanılan rakamlar tekrar kullanılmayacağından birler basamağı için 3 seçenek vardır.

Yüzler Basamağı	*Onlar Basamağı*	*Birler Basamağı*
5	4	3

Bu durumda $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ farklı doğal sayı yazılabilir.

ÖRNEK

$A = \{1,2,3,4,5\}$ kümesinin elemanları kullanılarak üç basamaklı kaç çift doğal sayı yazılabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

Üç basamaklı doğal sayının çift olması istendiğinden işleme önce koşulun olduğu basamaktan başlanmalıdır. Bu yüzden birler basamağı için 2 seçenek, onlar basamağı için 5 seçenek ve yüzler basamağı için 5 seçenek vardır.

Yüzler Basamağı	Onlar Basamağı	Birler Basamağı
5	5	2

$\{2,4\}$

Bu durumda $5 \cdot 5 \cdot 2 = 50$ farklı sayı yazılabilir.

ÖRNEK

$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinin elemanları kullanılarak dört basamaklı kaç doğal sayının yazılabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

Dört basamaklı doğal sayının binler basamağına sıfır rakamı gelemeyeceği için 5 seçenek, yüzler basamağı için 6 seçenek, onlar basamağı için 6 seçenek ve birler basamağı için 6 seçenek vardır.

Binler Basamağı	Yüzler Basamağı	Onlar Basamağı	Birler Basamağı
5	6	6	6

Bu durumda $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1080$ farklı sayı yazılabilir.

ÖRNEK

$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinin elemanları kullanılarak rakamları farklı dört basamaklı kaç doğal sayının yazılabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

Dört basamaklı doğal sayının binler basamağına sıfır rakamı gelemeyeceği için 5 seçenek, kullanılan rakam tekrar kullanılmayacağından yüzler basamağı için 5 seçenek, kullanılan rakam tekrar kullanılmayacağından onlar basamağı için 4 seçenek ve kullanılan rakam tekrar kullanılmayacağından birler basamağı için 3 seçenek vardır.

Binler Basamağı	Yüzler Basamağı	Onlar Basamağı	Birler Basamağı
5	5	4	3

Bu durumda $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$ farklı sayı yazılabilir.

ÖRNEK

$A = \{0,1,2,3,4,5\}$ kümesinin elemanları kullanılarak rakamları farklı dört basamaklı kaç tek doğal sayı yazılabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

Dört basamaklı doğal sayıların tek olması istendiğinden birler basamağı için 3 seçenek, kullanılan rakam tekrar kullanılamayacağından binler basamağı için (0 yazılamayacağından) 4 seçenek, yüzler basamağı için (sıfır yazılabileceğinden) 4 seçenek, onlar basamağı için 3 seçenek vardır.

Binler Basamağı	*Yüzler Basamağı*	*Onlar Basamağı*	*Birler Basamağı*
4	4	3	3
			$\{1,3,5\}$

Bu durumda $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 = 144$ farklı doğal sayı yazılabilir.

ÖRNEK

$A = \{0,1,2,3,4,5\}$ kümesinin elemanları kullanılarak rakamları farklı dört basamaklı kaç çift doğal sayı yazılabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

Dört basamaklı doğal sayının çift olabilmesi için birler basamağına sıfır dahil 3 farklı rakam gelir. Ancak sıfır rakamı binler basamağına yazılamadığından soru iki aşamada çözülebilir.

Sıfır sayısı birler basamağında ise binler basamağı için 5 seçenek, yüzler basamağı için 4 seçenek ve onlar basamağı için 3 seçenek vardır.

Binler Basamağı	*Yüzler Basamağı*	*Onlar Basamağı*	*Birler Basamağı*
5	4	3	1
			$\{0\}$

Birler basamağı sıfır olan $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 = 60$ farklı sayı yazılabilir.

Sıfır sayısı birler basamağında değil ise işleme koşulun olduğu basamaktan başlayacağımızdan birler basamağı için 2 seçenek, kullanılan rakam tekrar kullanılmayacağından binler basamağı için (0 yazılamayacağından) 4 seçenek, yüzler basamağı için (sıfır yazılabileceğinden) 4 seçenek, onlar basamağı için 3 seçenek vardır.

Binler Basamağı	Yüzler Basamağı	Onlar Basamağı	Birler Basamağı
4	4	3	2

$\{2,4\}$

Birler basamağında 2 veya 4 olan $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 96$ farklı sayı yazılabilir.

O hâlde toplam $60 + 96 = 156$ farklı sayı yazılabilir.

FAKTÖRİYEL

n bir pozitif tam sayı olmak üzere 1 den n ye kadar olan doğal sayıların çarpımına **n faktöriyel** denir ve **n!** şeklinde gösterilir.

- $\mathbf{n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n}$ olur.
- $\mathbf{1! = 1}$ olur ve $\mathbf{0! = 1}$ olarak kabul edilir.

Ayrıca $n! = n \cdot (n-1)! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)! = \ldots = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$ yazılabilir.

ÖRNEK

Aşağıda verilen ifadelerin değerlerini bulunuz.

a) $5!$ b) $6!$ c) $\frac{7!}{6!}$ ç) $6! + 5!$

ÇÖZÜM

a) $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ bulunur.

b) $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ bulunur.

c) $\frac{7!}{6!} = \frac{7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!}} = 7$ bulunur.

ç) $6! + 5! = 6 \cdot 5! + 5! = 5! \cdot (6 + 1) = 5! \cdot 7 = 120 \cdot 7 = 840$ bulunur.

ÖRNEK

$\frac{8! + 9!}{7!}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$\frac{8! + 9!}{7!} = \frac{8 \cdot 7! + 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} = \frac{\cancel{7!} \cdot (8 + 9 \cdot 8)}{\cancel{7!}} = 8 + 72 = 80$ bulunur.

ÖRNEK

$\dfrac{7!-6!}{6!+5!}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$\dfrac{7!-6!}{6!+5!} = \dfrac{7\cdot6\cdot5!-6\cdot5!}{6\cdot5!+5!} = \dfrac{\cancel{5!}\cdot(7\cdot6-6)}{\cancel{5!}\cdot(6+1)} = \dfrac{36}{7}$ bulunur.

ÖRNEK

n pozitif bir doğal sayı olmak üzere $\dfrac{(n+1)!-n!}{n!+(n-1)!}$ ifadesinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\dfrac{(n+1)!-n!}{n!+(n-1)!} = \dfrac{(n+1)\cdot n!-n!}{n\cdot(n-1)!+(n-1)!} = \dfrac{n!\cdot(n+1-1)}{(n-1)!\cdot(n+1)} = \dfrac{n\cdot\cancel{(n-1)!}\cdot n}{\cancel{(n-1)!}\cdot(n+1)} = \dfrac{n^2}{n+1}$ bulunur.

UYARI

Birbirinden farklı n tane nesne yan yana $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1 = n!$ farklı biçimde sıralanabilir.

ÖRNEK

4 kişinin 4 koltuğa kaç farklı şekilde oturabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

1. koltuğa 4 kişiden herhangi biri 4 değişik şekilde,
2. koltuğa kalan 3 kişiden biri 3 değişik şekilde,
3. koltuğa kalan 2 kişiden biri 2 değişik şekilde,
4. koltuğa kalan 1 kişi 1 farklı şekilde oturur.

Bu durumda 4 kişinin 4 koltuğa $4\cdot3\cdot2\cdot1 = 4! = 24$ farklı şekilde oturabileceği bulunur.

ÖRNEK

$1!+3!+5!+\ldots+127!$ toplamının birler basamağındaki rakamı bulunuz.

ÇÖZÜM

$1!+3!+5!+\ldots+127! = \underbrace{1+6}_{7}+120+\ldots+127!$ olur.

$5!+\ldots+127!$ toplamının birler basamağı daima 0 olduğundan $7+5!+\ldots+127!$ toplamının birler basamağı 7 olarak bulunur.

Sonuç olarak $n > 4$ olmak üzere $n!$ sayısı 2 ve 5 çarpanlarını içerdiğinden birler basamağı daima 0 olur.

ALIŞTIRMALAR

1. 15 kişilik bir sınıftan bir başkan ve bir başkan yardımcısının kaç farklı şekilde seçilebileceğini bulunuz.

2. A kentinden B kentine 5 farklı yoldan, B kentinden C kentine 4 farklı yoldan gidilebilmektedir. A kentinden C kentine gitmek isteyen bir kişinin B kentine uğramak şartıyla kaç farklı biçimde gidebileceğini bulunuz.

3. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ kümesinin elemanları ile üç basamaklı kaç doğal sayı yazılabileceğini bulunuz.

4. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ kümesinin elemanları ile rakamları farklı üç basamaklı kaç doğal sayı yazılabileceğini bulunuz.

5. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ kümesinin elemanları ile üç basamaklı kaç çift doğal sayı yazılabileceğini bulunuz.

6. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ kümesinin elemanları ile rakamları farklı üç basamaklı kaç tek doğal sayı yazılabileceğini bulunuz.

7. $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ kümesinin elemanları ile üç basamaklı kaç doğal sayı yazılabileceğini bulunuz.

8. $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ kümesinin elemanları ile rakamları farklı üç basamaklı kaç doğal sayı yazılabileceğini bulunuz.

9. $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ kümesinin elemanları ile rakamları farklı üç basamaklı kaç çift doğal sayının yazılabileceğini bulunuz.

10. $0! + 1! + 2! + 3! + 4!$ işleminin sonucunu bulunuz.

11. $\dfrac{6! + 5!}{7!}$ işleminin sonucunu bulunuz.

12. $\dfrac{6! + 5!}{5! - 4!}$ işleminin sonucunu bulunuz.

13. $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} - \dfrac{(n-1)!}{(n-2)!} = 17$ işleminde n değerini bulunuz.

11.2.1.2. PERMÜTASYON

$n, r \in \mathbb{N}$ ve $r \leq n$ olmak üzere n elemanlı bir kümenin birbirinden farklı r tane elemanından oluşan dizilişlerinin her birine **n nin r li permütasyonu** denir. n elemanlı bir kümenin r elemanlı permütasyonlarının sayısı $\mathbf{P(n,r)}$ biçiminde gösterilir.

$\mathbf{P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}}$ ile hesaplanır.

ÖRNEKLER

- $P(5,2) = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 5 \cdot 4 = 20$
- $P(4,3) = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1} = \frac{24}{1} = 24$
- $P(6,1) = \frac{6!}{(6-1)!} = \frac{6!}{5!} = \frac{6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!}} = 6$
- $P(4,4) = \frac{4!}{(4-4)!} = \frac{4!}{0!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1} = \frac{24}{1} = 24$
- $P(7,0) = \frac{7!}{(7-0)!} = \frac{\cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 1$

UYARI

n nin r li permütasyonlarını, n den başlamak üzere sayıları birer azaltarak r tane sayının çarpımı olarak yazıp bulabiliriz.

$P(n,r) = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)}_{\text{r tane}}$

ÖRNEKLER

- $P(7,1) = 7$
- $P(5,2) = 5 \cdot 4 = 20$
- $P(6,3) = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$
- $P(4,4) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
- $P(n+1,4) = (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2)$
- $P(n,3) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)$

ÖRNEK

5 kişinin 5 koltuğa kaç farklı şekilde oturabileceğini bulunuz.

Görsel 2.5

ÇÖZÜM

I. yol : Saymanın temel ilkesi gereği birinci koltuğa 5, ikinci koltuğa 4, üçüncü koltuğa 3, dördüncü koltuğa 2 ve beşinci koltuğa 1 kişi oturabileceğinden 5 kişinin 5 koltuğa $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ farklı şekilde oturabileceği bulunur.

II. yol : 5 kişi 5 koltuğa 5 in 5 li permütasyonları kadar farklı şekilde oturabilir. Bu durumda $P(5,5) = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ bulunur.

ÖRNEK

Aralarında Gökhan ve Caner'in de bulunduğu 6 arkadaş yan yana fotoğraf çektireceklerdir. Buna göre

a) Hiçbir koşul olmadan

b) Gökhan ile Caner'in yan yana olması koşulu ile

c) Gökhan ile Caner'in yan yana gelmemesi koşulu ile kaç değişik şekilde fotoğraf çektirebileceklerini bulunuz.

ÇÖZÜM

a) Hiçbir koşul olmadığından bu 6 arkadaş $P(6,6) = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ farklı biçimde sıralanabilirler ve 720 farklı biçimde fotoğraf çektirebilirler.

b) $\underbrace{\boxed{\text{Gökhan}}\boxed{\text{Caner}}}_{\text{1 kişi}} \quad \boxed{\text{Arkadaş}} \quad \boxed{\text{Arkadaş}} \quad \boxed{\text{Arkadaş}} \quad \boxed{\text{Arkadaş}}$

Gökhan ile Caner yan yana olacağından Gökhan ve Caner 1 kişi olarak düşünülürse grup $1 + 4 = 5$ kişi olup

$P(5,5) = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ farklı biçimde sıralanabilirler.

Gökhan ile Caner de kendi aralarında

$P(2,2) = 2! = 2 \cdot 1 = 2$ farklı biçimde sıralanırlar.

Bu durumda 6 kişi Gökhan ile Caner yan yana olmak koşuluyla $120 \cdot 2 = 240$ farklı şekilde fotoğraf çektirebilirler.

c) Gökhan ve Caner'in yan yana gelmemesi durumu; koşulsuz sıralanma durumundan, Gökhan ve Caner'in yan yana gelme durumu çıkarılarak bulunabilir. Bu durumda

$720 - 240 = 480$ bulunur.

ÖRNEK

5 farklı matematik ve 3 farklı tarih kitabı bir rafa sıralanacaktır.
Buna göre

Görsel 2.6

a) Kitapların kaç farklı şekilde sıralanabileceğini bulunuz.

b) Matematik kitapları yan yana olmak koşuluyla kitapların kaç farklı şekilde sıralanabileceğini bulunuz.

c) Aynı tür kitaplar yan yana olacak şekilde kitapların kaç farklı şekilde sıralanabileceğini bulunuz.

ç) Tüm matematik kitaplarının yan yana olmamak koşulu ile kitapların kaç değişik şekilde sıralanabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

a) Toplam $5 + 3 = 8$ kitap olduğundan 8 kitap $8!$ farklı biçimde sıralanabilir.

b) Matematik kitapları M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 ve tarih kitapları T_1, T_2, T_3 ile gösterilsin.

$$\underbrace{\boxed{M_1}\boxed{M_2}\boxed{M_3}\boxed{M_4}\boxed{M_5}}_{1 \text{ kitap}} \quad \boxed{T_1} \quad \boxed{T_2} \quad \boxed{T_3}$$

Matematik kitapları yan yana olacağından matematik kitapları 1 kitap olarak düşünülürse sıralanacak kitap sayısı $1 + 3 = 4$ kitap $4!$ farklı biçimde ve matematik kitapları da kendi arasında $5!$ farklı biçimde sıralanabileceğinden matematik kitapları yan yana olmak koşuluyla $4! \cdot 5!$ farklı biçimde sıralanabilir.

c) $$\underbrace{\boxed{M_1}\boxed{M_2}\boxed{M_3}\boxed{M_4}\boxed{M_5}}_{1 \text{ kitap}} \quad \underbrace{\boxed{T_1}\boxed{T_2}\boxed{T_3}}_{1 \text{ kitap}}$$

Aynı tür kitaplar yan yana olacağından matematik kitaplarını 1 kitap ve tarih kitaplarını 1 kitap olarak düşünebiliriz. Bu durumda $1 + 1 = 2$ kitap $2!$ farklı biçimde, matematik kitapları kendi arasında $5!$ farklı biçimde, tarih kitapları kendi arasında $3!$ farklı biçimde sıralanabileceğinden aynı tür kitaplar yan yana olacak şekilde $2! \cdot 5! \cdot 3!$ farklı biçimde sıralanabilirler.

ç) Tüm matematik kitaplarının yan yana olmamak koşulu ile kaç farklı şekilde sıralanacağını bulmak için bütün dizilişlerden matematik kitaplarının yan yana olma durumları çıkarılır. O hâlde $8! - 4! \cdot 5!$ bulunur.

11.2.1.3. TEKRARLI PERMÜTASYON

Bazı elemanları özdeş olan n elemanlı bir kümenin n li permütasyonlarına **tekrarlı permütasyon** denir.

$r_1, r_2, ..., r_k \in \mathbb{Z}^+$ ve $n = r_1 + r_2 + ... + r_k$ olmak üzere n elemanlı bir kümenin r_1 tanesi birbiriyle özdeş, r_2 tanesi birbiriyle özdeş, ..., r_k tanesi birbiriyle özdeş ise n elemanlı kümenin elemanlarının n li permütasyonlarının (dizilişlerinin) sayısı

$P(n; r_1, r_2, ..., r_k) = \dfrac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot ... \cdot r_k!}$ formülü ile hesaplanır.

ÖRNEK

12 838 818 sayısının rakamları yer değiştirilerek birbirinden farklı 8 basamaklı kaç farklı sayı yazılabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

12 838 818 sayısında 2 tane 1, 4 tane 8, 1 tane 2 ve 1 tane 3 rakamı olduğundan 8 basamaklı

$P(8; 2, 4, 1, 1) = \dfrac{8!}{2! \cdot 4! \cdot 1! \cdot 1!} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{2 \cdot 1 \cdot \cancel{4!} \cdot 1 \cdot 1} = 840$ farklı sayı yazılabilir.

ÖRNEK

MARMARA kelimesindeki 7 harfin yerleri değiştirilerek kaç farklı harf dizilimi yapılabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

MARMARA kelimesinde 2 tane M, 3 tane A ve 2 tane R harfi olduğundan bu 7 harf

$P(7; 2, 3, 2) = \dfrac{7!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{2 \cdot 1 \cdot \cancel{3!} \cdot 2 \cdot 1} = \dfrac{840}{4} = 210$ farklı biçimde sıralanabilir.

ÖRNEK

48 048 sayısının rakamları yer değiştirilerek birbirinden farklı 5 basamaklı kaç farklı sayı yazılabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

48 048 sayısını oluşturan beş tane rakam $\dfrac{5!}{2! \cdot 2!} = 30$ farklı şekilde yer değiştirir. Bu 30 sayıdan 0 ile başlayan $30 \cdot \dfrac{1}{5} = 6$ tane sayı olduğundan 5 basamaklı $30 - 6 = 24$ tane sayı yazılabilir.

ÖRNEK

Renkleri dışında aynı özelliğe sahip 4 beyaz, 3 sarı ve 2 lacivert bilyenin yan yana kaç farklı şekilde sıralanabileceğini bulunuz.

Görsel 2.7

ÇÖZÜM

Bilyeler renkleri dışında aynı özelliğe sahip olduğundan aynı renkli bilyelerin kendi arasında yer değiştirmesi farklı bir sıralanma değildir. Bu nedenle toplam $4+3+2=9$ bilyenin tekrarlı permütasyonlarının sayısı

$$P(9;4,3,2)=\frac{9!}{4!\cdot 3!\cdot 2!}=\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 1}=\frac{15\,120}{12}=1260 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$54\,757\,545$ sayısının rakamları yer değiştirilerek 5 ile başlayıp 7 ile biten birbirinden farklı 8 basamaklı kaç sayı yazılabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

Yazılacak sayılar 5 ile başlayıp 7 ile biteceğinden 5 475545 7 sayısında sadece aradaki rakamlar yer değiştirecektir. 6 basamaklı $475\,545$ sayısında 3 tane 5, 2 tane 4 ve 1 tane 7 rakamı olduğundan 5 ile başlayıp 7 ile biten 8 basamaklı

$$P(6;3,2,1)=\frac{6!}{3!\cdot 2!\cdot 1!}=\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}\cdot 2\cdot 1\cdot 1}=60 \text{ farklı sayı yazılabilir.}$$

ÖRNEK

$8\,825\,554$ sayısındaki rakamların yerleri değiştirilerek birbirinden farklı 7 basamaklı yazılabilecek sayıların kaç tanesinde 8 rakamlarının yan yana olabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

8 rakamları yan yana olacağından 8 rakamlarını 1 rakam olarak düşünebiliriz. Bu durumda 8 825 554 sayısı 6 basamaklı bir sayı gibi olur. Bu 6 basamaklı sayıda 3 tane 5, 1 tane 2, 1 tane 4 ve 1 tane olarak kabul ettiğimiz 8 rakamları olduğundan istenen durumda

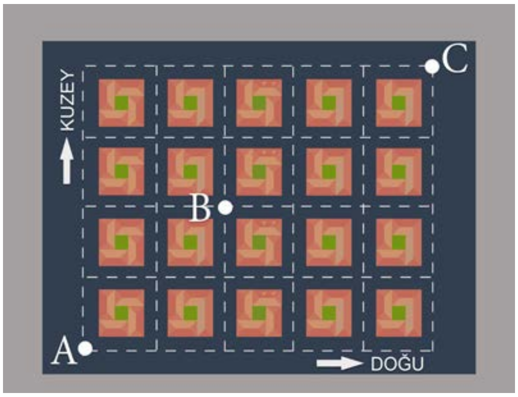
$$\begin{aligned} P(6;3,1,1,1) &= \frac{6!}{3!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} \\ &= \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}\cdot 1\cdot 1\cdot 1} \\ &= 120 \text{ tane sayı bulunur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK

Yandaki şekilde birbiriyle kesişen cadde ve sokakların krokisi gösterilmiştir.

A noktasında bulunan Ahmet sadece doğu veya kuzey yönünde ilerleyecektir. Buna göre Ahmet'in

a) A noktasından C noktasına kaç farklı yolla gidebileceğini bulunuz.
b) B noktasına uğramak koşuluyla A noktasından C noktasına kaç farklı yolla gidebileceğini bulunuz.



Görsel 2.8

ÇÖZÜM

a) A noktasından C noktasına gitmek isteyen Ahmet hangi güzergâhı kullanırsa kullansın 5 birim doğuya ve 4 birim kuzeye hareket etmelidir. Bu güzergâhlardan birisi DDDDDKKKK biçimindedir. Diğer güzergâhlar ise bu harflerin kendi aralarındaki yer değiştirmesi ile elde edilir. Bu durumda Ahmet, A noktasından C noktasına

$P(9;5,4) = \frac{9!}{5! \cdot 4!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126$ farklı şekilde gidebilir.

b) Ahmet'in B noktasına uğraması koşuluyla A noktasından C noktasına gidebileceği yolların sayısı hesaplanırken ilk önce A noktasından B noktasına kaç farklı yolla gidebileceği sonra da B noktasından C noktasına kaç farklı yolla gidebileceği hesaplanmalıdır. Ahmet, A noktasından B noktasına giderken hangi güzergâhı kullanırsa kullansın 2 birim doğuya ve 2 birim kuzeye hareket etmelidir. Bu güzergâhlardan birisi DDKK biçimindedir. Diğer güzergâhlar ise bu harflerin kendi aralarındaki yer değiştirmesi ile olur. Bu durumda Ahmet, A noktasından B noktasına

$P(4;2,2) = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!} \cdot 2 \cdot 1} = 6$ farklı şekilde gidebilir.

Ahmet, B noktasından C noktasına giderken hangi güzergâhı kullanırsa kullansın 3 birim doğuya ve 2 birim kuzeye hareket etmelidir. Bu güzergâhın birisi DDDKK biçimindedir. Diğer güzergâhlar ise bu harflerin kendi aralarındaki yer değiştirmesi ile olur. Bu durumda Ahmet, B noktasından C noktasına

$P(5;3,2) = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 2 \cdot 1} = 10$ farklı şekilde gidebilir.

O hâlde Ahmet B noktasına uğramak koşuluyla A noktasından C noktasına $6 \cdot 10 = 60$ farklı şekilde gidebilir.

ALIŞTIRMALAR

1. $P(5,0) + P(6,1) - P(2,2)$ işleminin sonucunu bulunuz.

2. n tane elemanın 2 li sıralanışlarının sayısı 20 olduğuna göre n değerini bulunuz.

3. 

3 kız ve 5 erkek öğrencinin bir sıra boyunca kaç farklı şekilde sıralanabileceklerini bulunuz.

4. 3 kız ve 5 erkek öğrencinin bir sıra boyunca kızlar yan yana olmak üzere kaç farklı şekilde sıralanabileceklerini bulunuz.

5. 

3 farklı matematik kitabı ve 4 farklı coğrafya kitabının bir rafa matematik kitapları yan yana olmak şartı ile kaç farklı şekilde sıralanabileceklerini bulunuz.

6. 

4 farklı matematik kitabı, 5 farklı coğrafya kitabı ve 6 farklı tarih kitabının bir rafa aynı türden kitaplar yan yana olmak şartı ile kaç farklı şekilde sıralanabileceklerini bulunuz.

7. 

Nurbanu ve Selin'in de bulunduğu 7 kişilik bir arkadaş grubu yan yana fotoğraf çektireceklerdir. Nurbanu ve Selin'in sıranın uçlarında olması şartıyla kaç farklı şekilde fotoğraf çekilebileceğini bulunuz.

8. Anne, baba ve 4 çocuktan oluşan 6 kişilik bir aile yan yana fotoğraf çektireceklerdir. Anne ve babanın ortasında en küçük çocuk olması şartıyla bu ailenin kaç farklı şekilde fotoğraf çektirebileceklerini bulunuz.

9. ÇANAKKALE kelimesindeki 9 harfin yerleri değiştirilerek kaç farklı sıralama yapılabileceğini bulunuz.

10. 2 353 322 sayısındaki rakamların yerleri değiştirilerek 7 basamaklı kaç farklı sayı yazılabileceğini bulunuz.

11. 353 000 sayısındaki rakamların yerleri değiştirilerek 6 basamaklı kaç farklı sayı yazılabileceğini bulunuz.

12. Renkleri dışında aynı özelliğe sahip 2 beyaz, 3 sarı ve 5 mavi halkanın bir ip üzerine kaç farklı şekilde sıralanabileceğini bulunuz.

11.2.1.4. KOMBİNASYON

n elemanlı bir kümenin r elemanlı alt kümelerinin her birine **n nin r li kombinasyonu** denir.

$n, r \in \mathbb{N}$ ve $n \geq r$ olmak üzere n elemanlı bir kümenin r elemanlı kombinasyonlarının sayısı $C(n,r)$ ya da $\binom{n}{r}$ ile gösterilir. $C(n,r) = \binom{n}{r} = \dfrac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$ olur.

ÖRNEK

$A = \{a, b, c, d, e\}$ kümesinin 2 elemanlı kombinasyon sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM

$s(A) = 5$ olduğundan 5 elemanlı bir kümenin 2 elemanlı kombinasyon sayısı

$\binom{5}{2} = \dfrac{P(5,2)}{2!} = \dfrac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = \dfrac{20}{2} = 10$ olur.

ÖRNEK

7 elemanlı bir kümenin 3 elemanlı kombinasyon sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM

7 elemanlı bir kümenin 3 elemanlı kombinasyon sayısı

$\binom{7}{3} = \dfrac{P(7,3)}{3!} = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \dfrac{210}{6} = 35$ olur.

KOMBİNASYONUN ÖZELLİKLERİ

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
2. $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$
3. $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
4. $\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$
5. $\binom{n}{r} = \binom{n}{k} \Rightarrow r = k$ veya $n = k + r$
6. $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n} = 2^n$

ÖRNEK

$\binom{6}{0} = \binom{6}{6} = 1$ olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM

$$\left.\begin{aligned}\binom{6}{0} &= \frac{P(6,0)}{0!} = \frac{1}{1} = 1 \\ \binom{6}{6} &= \frac{P(6,6)}{6!} = \frac{\cancel{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}{\cancel{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = 1\end{aligned}\right\} \text{ ise } \binom{6}{0} = \binom{6}{6} = 1 \text{ olur.}$$

ÖRNEK

$\binom{5}{2} = \binom{5}{5-2} = \binom{5}{3}$ olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM

$$\left.\begin{aligned}\binom{5}{2} &= \frac{P(5,2)}{2!} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = \frac{20}{2} = 10 \\ \binom{5}{3} &= \frac{P(5,3)}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot 2 \cdot 1} = \frac{20}{2} = 10\end{aligned}\right\} \text{ bu durumda } \binom{5}{2} = \binom{5}{3} \text{ olur.}$$

ÖRNEK

$\binom{7}{1} = 7$ olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM

$\binom{7}{1} = \frac{P(7,1)}{1!} = \frac{7}{1} = 7$ olur.

ÖRNEK

$\binom{n}{3} + \binom{n}{4} = \binom{11-n}{4}$ olduğuna göre n değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\binom{n}{r}+\binom{n}{r+1}=\binom{n+1}{r+1}$ olduğundan $\binom{n}{3}+\binom{n}{4}=\binom{n+1}{4}$ olur. Buna göre

$$\binom{n}{3}+\binom{n}{4}=\binom{11-n}{4} \Rightarrow \binom{n+1}{4}=\binom{11-n}{4}$$

$$\Rightarrow n+1=11-n$$
$$\Rightarrow 2n=10$$
$$\Rightarrow n=5 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$\binom{8}{2}=\binom{8}{2n-4}$ olduğuna göre n nin alabileceği değerleri bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\binom{8}{2}=\binom{8}{2n-4} \Rightarrow 2=2n-4 \quad \text{veya} \quad 8=2+2n-4$$

$$\Rightarrow 6=2n \quad \text{veya} \quad 10=2n$$
$$\Rightarrow n=3 \quad \text{veya} \quad n=5 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

8 elemanlı bir kümenin en az 2 elemanlı alt kümelerinin sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM

8 elemanlı bir kümenin en az 2 elemanlı alt kümeleri sayısı

$\binom{8}{2}+\binom{8}{3}+\binom{8}{4}+...+\binom{8}{8}=x$ olsun.

$$\binom{8}{0}+\binom{8}{1}+\binom{8}{2}+\binom{8}{3}+\binom{8}{4}+...+\binom{8}{8}=2^8$$

$$1+8+x=256$$
$$x=256-9$$
$$x=247 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

4 doktor ve 5 hemşire arasından 2 doktor ve 3 hemşireden oluşan 5 kişilik bir sağlık ekibinin kaç farklı şekilde seçilebileceğini bulunuz.

Görsel 2.9

ÇÖZÜM

4 doktor arasından 2 doktor $\binom{4}{2} = \frac{P(4,2)}{2!} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = \frac{12}{2} = 6$

5 hemşire arasından 3 hemşire $\binom{5}{3} = \frac{P(5,3)}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot 2 \cdot 1} = \frac{20}{2} = 10$ farklı şekilde seçilebilir.

2 doktor ve 3 hemşireden oluşan 5 kişilik bir sağlık ekibi $6 \cdot 10 = 60$ farklı şekilde seçilebilir.

ÖRNEK

$A = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi veriliyor.

a) A kümesinin 3 elemanlı alt kümelerinin kaçında a elemanının bulunduğunu hesaplayınız.

b) A kümesinin 3 elemanlı alt kümelerinin kaçında e elemanının bulunmadığını hesaplayınız.

c) A kümesinin 3 elemanlı alt kümelerinin kaçında b elemanının bulunup c elemanının bulunmadığını hesaplayınız.

ÇÖZÜM

a) Oluşturulabilecek 3 elemanlı alt kümelerinin elemanlarından biri a olacağından diğer 2 si $B = \{b, c, d, e\}$ kümesinin elemanlarından seçilmelidir. $s(B) = 4$ olduğundan bu 4 elemandan 2 eleman $\binom{4}{2} = \frac{P(4,2)}{2!} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = \frac{12}{2} = 6$ farklı şekilde seçilebilir. Bu durumda A kümesinin a elemanını içeren 3 elemanlı alt kümelerinin sayısı 6 bulunur.

b) Oluşturulabilecek 3 elemanlı alt kümelerinin elemanları arasında e bulunmayacağından 3 ü de $C = \{a, b, c, d\}$ kümesinin elemanlarından seçilmelidir. $s(C) = 4$ olduğundan bu 4 elemandan 3 eleman $\binom{4}{3} = \frac{P(4,3)}{3!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{24}{6} = 4$ farklı şekilde seçilebilir. Bu durumda A kümesinin e elemanını içermeyen 3 elemanlı alt küme sayısı 4 bulunur.

c) Oluşturulabilecek 3 elemanlı alt kümelerinin elemanlarından biri b olduğundan ve bu kümede c bulunmayacağından diğer 2 si $D = \{a, d, e\}$ kümesinin elemanlarından seçilmelidir. $s(D) = 3$ olduğundan bu 3 elemandan 2 eleman $\binom{3}{2} = \frac{P(3,2)}{2!} = \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 1} = \frac{6}{2} = 3$ farklı şekilde seçilebilir. Bu durumda A kümesinin b elemanını içeren ve c elemanını içermeyen 3 elemanlı alt küme sayısı 3 bulunur.

ÖRNEK

12 soruluk bir sınavda her bir öğrenci toplam 10 soru cevaplamalıdır. İlk 7 sorunun cevaplanması zorunlu olduğuna göre bir öğrencinin cevaplayacağı 10 soruyu kaç farklı şekilde seçebileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

1. soru	2. soru	3. soru	4. soru	5. soru	6. soru	7. soru	8. soru	9. soru	10. soru	11. soru	12. soru

5 sorudan 3 soru seçilmeli

10 soru cevaplanacağı için cevaplanan ilk 7 sorudan sonra 3 soru daha cevaplanmalıdır. Bu 3 soru $12-7=5$ sorudan seçilebileceğinden

$\binom{5}{3}=\frac{P(5,3)}{3!}=\frac{5\cdot4\cdot\cancel{3}}{\cancel{3}\cdot2\cdot1}=\frac{20}{2}=10$ farklı şekilde seçilebilir.

ÖRNEK

Görsel 2.10

7 kişilik bir toplantıda herkes birbiri ile birer defa tokalaşacağına göre bu toplantıdaki toplam tokalaşma sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM

Tokalaşmalar 2 kişi arasında olacağından 7 kişinin 2 li eşleşmelerinin sayısı kadar tokalaşma olacaktır. Buradan

$\binom{7}{2}=\frac{P(7,2)}{2!}=\frac{7\cdot6}{2\cdot1}=\frac{42}{2}=21$ farklı tokalaşma olur.

ÖRNEK

5 negatif, 4 pozitif tam sayı arasından çarpımları negatif olacak 3 farklı tam sayının kaç farklı şekilde seçilebileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

Seçilen 3 sayının çarpımlarının negatif olabilmesi için üçünün negatif veya birinin negatif, ikisinin pozitif olması gereklidir. Bu durumda 3 farklı sayı

$$\binom{5}{3}+\binom{5}{1}\cdot\binom{4}{2}=\frac{5\cdot4\cdot\cancel{3}}{\cancel{3}\cdot2\cdot1}+5\cdot\frac{4\cdot3}{2\cdot1}$$
$$=10+30$$
$=40$ farklı şekilde seçilebilir.

ALIŞTIRMALAR

1. $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ kümesinin 3 elemanlı alt kümelerinin sayısını bulunuz.

2. 6 elemanlı bir kümenin 2 elemanlı alt kümelerinin sayısını bulunuz.

3. $\binom{5}{0} + \binom{6}{1} + \binom{7}{6} + \binom{8}{8}$ işleminin sonucunu bulunuz.

4. $\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5}$ işleminin sonucunu bulunuz.

5. 6 elemanlı bir kümenin en az 2 elemanlı kaç alt kümesi olduğunu bulunuz.

6. $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ kümesinin 4 elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde a elemanının bulunduğunu hesaplayınız.

7. $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ kümesinin 2 elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde a elemanının bulunmadığını hesaplayınız.

8. $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ kümesinin 3 elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde a elemanının bulunup c elemanının bulunmadığını hesaplayınız.

9. 5 erkek ve 3 kadın arasından 3 erkek ve 2 kadının kaç farklı şekilde seçilebileceğini bulunuz.

10. Bir toplantıda herkes birbiriyle yalnız bir kez el sıkışıyor. Toplam el sıkışma sayısı 66 olduğuna göre toplantıya kaç kişinin katıldığını bulunuz.

11. Bir öğrenci sınavda sorulan 12 sorudan 10 tanesini cevaplamak zorunda ise öğrencinin 10 soruyu kaç farklı şekilde seçebileceğini bulunuz.

12. Bir sınıfta 7 kişi arasından 3 kişilik bir ekip ve bu ekip içinden de bir başkan seçilecektir. Bu seçimin kaç farklı şekilde yapılabileceğini bulunuz.

11.2.2.1. ÖRNEK UZAY, DENEY, ÇIKTI, BİR OLAYIN TÜMLEYENİ, KESİN OLAY, İMKÂNSIZ OLAY, AYRIK OLAY VE AYRIK OLMAYAN OLAY

Önceden sonucu bilinmeyen olayların gerçekleşme durumlarına ilişkin veri toplama sürecine **deney** adı verilir. Madenî paranın yazı tura için havaya atılması, içinde farklı renkte boncuklar bulunan bir torbadan bir boncuk çekilmesi vb. işlemlerin her biri matematiksel deneylere birer örnektir.

Bir deney sonucunda karşılaşılabilecek olası tüm durumların her birine **çıktı** denir.

Deney sonucunda elde edilen bütün çıktıların kümesine ise **örnek uzay** adı verilir ve **E** ile gösterilir.

Bir E örnek uzayın her bir alt kümesine **olay** denir.

A olayının çıktılarının dışında örnek uzayın bütün çıktılarını içeren olaya **A olayının tümleyeni** denir ve A' ile gösterilir.

ÖRNEK

Bir madenî paranın havaya atılması deneyinde oluşacak çıktıları ve örnek uzayı yazınız.


Görsel 2.11

ÇÖZÜM

Bir madenî paranın havaya atılması deneyinde oluşacak çıktılar yazı (Y) ve tura (T) olup örnek uzay $E = \{Y, T\}$ olur.

ÖRNEK

Bir zarın havaya atılması deneyinde oluşacak çıktıları ve örnek uzayı yazınız.


Görsel 2.12

ÇÖZÜM

Bir zarın havaya atılması deneyinde oluşacak çıktılar $1, 2, 3, 4, 5, 6$ olup örnek uzay $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ olur.

ÖRNEK

Bir madenî paranın arka arkaya iki defa havaya atılması deneyinde oluşacak örnek uzayı yazınız.

ÇÖZÜM

Bir madenî paranın arka arkaya iki defa havaya atılması deneyinde oluşacak örnek uzay $E = \{(Y, Y), (Y, T), (T, Y), (T, T)\}$ olur.

ÖRNEK

Bir zar ve bir madenî paranın havaya birlikte atılması deneyinde oluşacak örnek uzayı yazıp örnek uzayın eleman sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM

Bir zar ve bir madenî paranın havaya birlikte atılması deneyinde oluşacak örnek uzay tabloda görülen ikililer olur. Buna göre $E=\{(Y,1),(Y,2),(Y,3),(Y,4),(Y,5),(Y,6),(T,1),(T,2),(T,3),(T,4),(T,5),(T,6)\}$ olup örnek uzayın eleman sayısı $s(E)=12$ olur.

	1	2	3	4	5	6
Y	(Y,1)	(Y,2)	(Y,3)	(Y,4)	(Y,5)	(Y,6)
T	(T,1)	(T,2)	(T,3)	(T,4)	(T,5)	(T,6)

ÖRNEK

İki zarın birlikte havaya atılması deneyinde oluşacak örnek uzayı yazıp eleman sayısını bulunuz.

Görsel 2.13

ÇÖZÜM

İki zarın birlikte havaya atılması deneyinde oluşacak örnek uzay şekilde görülen ikililer olur.

Buna göre $E=\{(1,1),(1,2),(1,3),...,(6,6)\}$ olup örnek uzayın eleman sayısı $s(E)=36$ olur.

1. Zar / 2. Zar	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
⚁	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
⚂	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
⚃	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
⚄	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
⚅	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

ÖRNEK

Üzerlerinde $1,2,3,4,5,6,7,8$ ve 9 rakamları yazılı bilyeler bir torbaya atılıp rastgele bir bilye çekiliyor. Çekilen bilyenin üzerinde asal sayı yazma olayını ve bu olayın tümleyenini liste biçiminde yazınız.

ÇÖZÜM

Torbadan çekilen bilyelerin üzerinde asal sayı yazma A olayı ise $A=\{2,3,5,7\}$ ve A olayının tümleyeni, torbadan çekilen bilyenin üzerinde asal sayı yazmaması olacağından $A'=\{1,4,6,8,9\}$ olur.

EŞ OLASI OLAYLAR, EŞ OLASI OLMAYAN OLAYLAR

Aynı örnek uzayındaki bir olaya ait olası durumların sayısı başka bir olaya ait olası durumların sayısına eşit ise bu olaylara **eş olası olaylar**, eşit değil ise **eş olası olmayan olaylar** denir.

ÖRNEK

Bir torbada bulunan 7 özdeş toptan 2 si sarı, 3 ü beyaz ve 2 si mavidir. Bu torbadan rastgele bir top çekiliyor. Çekilen topun sarı olması S, beyaz olması B ve mavi olması M olayı ise hangilerinin eş olası, hangilerinin eş olası olmayan olaylar olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Çekilen topun sarı olma olayı S ise $s(S)=2$, çekilen topun beyaz olma olayı B ise $s(B)=3$ ve çekilen topun mavi olma olayı M ise $s(M)=2$ dir.
S olayı ile M olayının eleman sayısı yani olası durumlarının sayısı eşit olduğundan S olayı ile M olayı eş olası olaylardır.
S olayı ile B olayının eleman sayıları ve B olayı ile M olayının eleman sayıları yani olası durumlarının sayısı eşit olmadığından S ile B ve B ile M olayları eş olası olmayan olaylardır.

ÖRNEK

Bir paranın havaya atılması deneyinde yazı gelmesi olayı ile tura gelmesi olayının eş olası olay olup olmadığını bulunuz.

ÇÖZÜM

Bir paranın havaya atılması deneyinin sonucu yazı ya da tura olabilir. Her iki olayın da olası durumlarının sayısı eşit olduğundan paranın yazı olması olayı ile tura olması olayı eş olası olaylar olur.

ÖRNEK

İki zarın birlikte atılması deneyinde A olayı zarların üst yüzlerine gelen sayılar toplamının 5 olması ve B olayı zarların üst yüzlerine gelen sayıların aynı olması ise bu iki olayın eş olası olay olup olmadığını bulunuz.

ÇÖZÜM

İki zar birlikte atıldığında üst yüzlerine gelen sayılar toplamının 5 olması
$A=\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$ ve zarların üst yüzüne gelen sayıların aynı olması
$B=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$ olur.
Burada $s(A)=4$ ve $s(B)=6$ olduğundan A olayı ile B olayının eleman sayısı yani olası durumları eşit olmadığından A olayı ile B olayı eş olası olmayan olaylardır.

AYRIK OLAY VE AYRIK OLMAYAN OLAY

Bir E örnek uzayındaki A ve B gibi iki olayın ortak elemanı yoksa ya da iki olayın aynı anda gerçekleşmesi mümkün değilse bu olaylara **ayrık olaylar** denir.

A ve B olayları ayrık olaylar ise $A \cap B = \varnothing$ olur.

$A \cap B \neq \varnothing$ ise A ve B olayları ayrık olmayan olaylardır.

ÖRNEK

Bir zarın havaya atılması deneyinde aşağıda verilen olayların ayrık olay olup olmadığını bulunuz.

a) Bir zarın havaya atılması deneyinde zarın üst yüzüne tek sayı gelme olayı ile çift sayı gelme olayı

b) Bir zarın havaya atılması deneyinde zarın üst yüzüne çift sayı gelme olayı ile asal sayı gelme olayı

c) Bir zarın havaya atılması deneyinde zarın üst yüzüne gelen sayının en az 3 gelme olayı ile en çok 3 gelme olayı

ÇÖZÜM

a) Bir zarın havaya atılması deneyinde zarın üst yüzüne tek sayı gelme olayı $T = \{1,3,5\}$ ve çift sayı gelme olayı $Ç = \{2,4,6\}$ olmak üzere $T \cap Ç = \varnothing$ olduğundan bu iki olay ayrık olaydır.

b) Bir zarın havaya atılması deneyinde zarın üst yüzüne çift sayı gelme olayı $Ç = \{2,4,6\}$ ve asal sayı gelme olayı $A = \{2,3,5\}$ olmak üzere $Ç \cap A = \{2\}$ olduğundan bu iki olay ayrık olmayan olaydır.

c) Bir zarın havaya atılması deneyinde zarın üst yüzüne en az 3 gelme olayı $A = \{3,4,5,6\}$ ve en çok 3 gelme olayı $B = \{1,2,3\}$ olmak üzere $A \cap B = \{3\}$ olduğundan bu iki olay ayrık olmayan olaydır.

ÖRNEK

Bir çift zarın havaya atılması deneyinde zarların üst yüzlerine gelen sayıların eşit olması olayı ile toplamlarının 10 olması olayının ayrık olay olup olmadığını bulunuz.

ÇÖZÜM

Bir çift zarın havaya atılması deneyinde zarların üst yüzlerine gelen sayıların eşit olması olayı A olsun.
$A = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$ olur.
Bir çift zarın havaya atılması deneyinde zarların üst yüzlerine gelen sayıların toplamının 10 olması olayı B olsun.
$B = \{(4,6),(5,5),(6,4)\}$ olur.
$A \cap B = \{(5,5)\}$ olduğundan bu iki olay ayrık olmayan olaylardır.

Yusuf el-Kindi

Görsel 2.14: Yusuf el-Kindi

Mesaj gizleme ve çözme (şifre/deşifre) usullerine dair zamanımıza ulaşan ilk eser filozof Yusuf el-Kindi'nin "Şifrelenmiş Metinlerin Çözümlenmesi" adlı el yazması eseridir. Harflere dayalı kriptografinin iki temel şifreleme yöntemi olan "yerine koyma" ve "yer değiştirme" sistemlerini ilk defa açık bir şekilde ayıran ve bu ikisinin birlikte kullanıldığı karma şifreleme sistemiyle neyin kastedildiğini açıklayan Yusuf el-Kindi'dir. Şifrelerin çözüm teknikleriyle ilgili olarak Arap dilinde harflerin kullanılma sıklığına dayalı derecelerinin analizi ve istatistiği, kelimelerde bir araya gelen ve gelmeyen harflerin analizi, hitabe ve mektupların başlangıç kısımlarında yer alan muhtemel klişe kelimeler yöntemi ve uygulanması gibi kriptografinin temel esasları yine Yusuf el-Kindi tarafından ortaya konulmuştur. Her iki sistemin kullanılmasıyla ilgili eski ve yeni uygulamalarda birçok teknik geliştirmiş, şifreleri çözmek için gerekli işlemlerin nasıl yapılacağına dair çeşitli eserler kaleme almıştır.

Yusuf el-Kindi'nin kriptanaliz tekniğini şöyle açıklayabiliriz: Dünyada aynı alfabenin kullanıldığı bütün dillerde her harf aynı sıklıkta kullanılmaktadır. Örneğin Latin alfabesini kullanan Türkçede en çok kullanılan harf "A" iken İngilizcede en çok kulanılan harf "E" dir. Bu nedenle öncelikle şifrelenmiş metnin hangi dilde yazıldığını bilmek gerekir. Yazıldığı dili bildiğimiz şifreli bir mesajı çözmek için aynı dilde yazılmış yeterince uzun bir metin bulup her harfin kullanım sıklığını hesaplamak gereklidir. Metinde en sık kullanılan harf, şifreli metindeki en sık kullanılan harfe denk gelmektedir. Aynı işlem sırasıyla diğer harfler için de yapılır. Bu işlem bittikten sonra mesajdaki harfler ortaya çıkmış olur. Yusuf el-Kindi bu kriptanaliz yöntemine frekans analizi adını vermiştir. Sebebi ise bir dildeki kullanım sıklığı yani frekansı olmasıdır.

Kaynakça: 1. İslam Ansiklopedisi Cilt 30, Sayfa: 321
2. Şifrelerin Matematiği Kriptografi, ODTÜ Yayıncılık 2012, Sayfa: 29-30

11.2.2.2. OLASILIK KAVRAMI İLE İLGİLİ UYGULAMALAR

Her bir çıktısının gelme şansı eşit olan örnek uzay E ve bu örnek uzayın bir olayı A olmak üzere A olayının gerçekleşme olasılığı $P(A)$ ile gösterilir.

Bir A olayının olasılığı $A \subseteq E$ olmak üzere

$$P(A) = \frac{\text{A olayının eleman sayısı}}{\text{Örnek uzayın eleman sayısı}} = \frac{s(A)}{s(E)}$$ ile bulunur.

Bu durum eş olası olmayan olaylar için geçerli değildir.

Bir A olayının olma olasılığı en az 0, en çok 1 olur. A olayının olasılığı $P(A)$ olduğundan $0 \leq P(A) \leq 1$ olur.

$A = \varnothing$ ise A olayına **imkânsız olay** denir ve olasılığı 0 dır.

$A = E$ ise A olayına **kesin olay** denir ve olasılığı 1 dir.

ÖRNEK

Bir zarın havaya atılması deneyinde

Görsel 2.15

a) Üst yüze gelen sayının 3 olma olasılığını bulunuz.

b) Üst yüze gelen sayının çift sayı olma olasılığını bulunuz.

c) Üst yüze gelen sayının 2 den büyük olma olasılığını bulunuz.

ç) Üst yüze gelen sayının 7 den küçük olma olasılığını bulunuz.

d) Üst yüze gelen sayının 8 olma olasılığını bulunuz.

ÇÖZÜM

Bir zarın havaya atılması deneyinde örnek uzay $E = \{1,2,3,4,5,6\}$ ve $s(E) = 6$ olur.

a) Zarın üst yüzüne 3 gelmesi olayı A olsun. $A = \{3\}$ ve $s(A) = 1$ olduğundan $P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{1}{6}$ olur.

b) Zarın üst yüzüne çift sayı gelmesi olayı B olsun. $B = \{2,4,6\}$ ve $s(B) = 3$ olduğundan $P(B) = \frac{s(B)}{s(E)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ olur.

c) Zarın üst yüzüne 2 den büyük sayı gelmesi olayı C olsun. $C = \{3,4,5,6\}$ ve $s(C) = 4$ olduğundan $P(C) = \frac{s(C)}{s(E)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ olur.

ç) Zarın üst yüzüne 7 den küçük sayı gelmesi olayı Ç olsun. $Ç = \{1,2,3,4,5,6\}$ ve $s(Ç) = 6$ olduğundan $P(Ç) = \frac{s(Ç)}{s(E)} = \frac{6}{6} = 1$ olur. Bu olayın olasılığı 1 olduğundan kesin olaydır.

d) Zarın üst yüzüne 8 gelmesi olayı D olsun. $D = \{\ \}$ ve $s(D) = 0$ olduğundan $P(D) = \frac{s(D)}{s(E)} = \frac{0}{6} = 0$ olur. Bu olayın olasılığı 0 olduğundan imkânsız olaydır.

ÖRNEK

Bir madenî paranın arka arkaya iki defa havaya atılması deneyinde üste gelen yüzlerinin farklı olma olasılığını bulunuz.

Görsel 2.16

ÇÖZÜM

Bir madenî paranın arka arkaya iki defa havaya atılması deneyinde oluşacak örnek uzay $E = \{(Y,Y),(Y,T),(T,Y),(T,T)\}$ ve $s(E) = 4$ olur. Arka arkaya iki defa havaya atılan madenî paranın üst yüzlerinin farklı olması olayı A olsun. $A = \{(Y,T),(T,Y)\}$ ve $s(A) = 2$ olduğundan

$P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ olur.

ÖRNEK

Bir torbada bulunan 9 özdeş bilyeden 4 ü sarı, 3 ü beyaz ve 2 si mavidir. Bu torbadan rastgele çekilen bir bilyenin beyaz olma olasılığını bulunuz.

ÇÖZÜM

Torbada 4 sarı, 3 beyaz ve 2 mavi bilye olduğundan örnek uzayın eleman sayısı $s(E) = 4 + 3 + 2 = 9$ ve torbadan rastgele çekilen bilyenin beyaz gelmesi olayı A olsun. A olayının eleman sayısı $s(A) = 3$ olur.

Torbadan rastgele çekilen bir bilyenin beyaz olma olasılığı $P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ olur.

A ve B ayrık iki olay ise A veya B olayının olma olasılığı bu olayların olasılıkları toplamıdır.
$P(A \text{ veya } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ olur.

A ve B ayrık olmayan iki olay ise
$P(A \text{ veya } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ olur.

ÖRNEK

Bir zar atma deneyinde çift sayı gelme olayı A, asal sayı gelme olayı B olsun.
Buna göre

a) A ve B olayını liste biçiminde yazınız.

b) A veya B olayını liste biçiminde yazınız.

ÇÖZÜM

Bir zar atma deneyinde çift sayı gelme olayı $A = \{2,4,6\}$ ve asal sayı gelme olayı $B = \{2,3,5\}$ olur.

a) "A ve B olayı" bir deneyde hem A hem de B olayının gerçekleşmesidir. Buradan A ve B olayı

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{2,4,6\} \cap \{2,3,5\} \\ &= \{2\} \text{ olur.} \end{aligned}$$

b) "A veya B olayı" bir deneyde A olayı veya B olayının gerçekleşmesidir. Buradan A veya B olayı

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{2,4,6\} \cup \{2,3,5\} \\ &= \{2,3,4,5,6\} \text{ olur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK

Bir torbada bulunan 13 özdeş bilyeden 6 sı sarı, 3 ü beyaz ve 4 ü mavidir. Bu torbadan rastgele alınan bir bilyenin sarı veya mavi olma olasılığını bulunuz.

ÇÖZÜM

Torbadaki toplam bilye sayısı 13 olduğundan örnek uzayın elaman sayısı $s(E) = 13$ olur. Torbadan rastgele alınan bir bilyenin sarı olması olayı A, mavi olması olayı B olsun.

Torbadaki bilyelerin 6 tanesi sarı olduğundan $s(A) = 6$ olup $P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{6}{13}$ olur. Torbadaki bilyelerin 4 tanesi mavi olduğundan $s(B) = 4$ olup $P(B) = \frac{s(B)}{s(E)} = \frac{4}{13}$ olur.

Rastgele alınan bilyeler aynı anda hem sarı hem de mavi olamayacağından bu olaylar ayrık olaylardır. Alınan bilyenin sarı veya mavi olma olasılığı ise

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{6+4}{13} = \frac{10}{13}$ bulunur.

ÖRNEK

40 kişilik bir öğrenci grubunda futbol oynayanların sayısı 21 ve basketbol oynayanların sayısı 12 dir. Her iki oyunu oynayanların sayısı da 8 olduğuna göre bu gruptan rastgele seçilen bir öğrencinin futbol veya basketbol oynama olasılığını bulunuz.

ÇÖZÜM

Toplam öğrenci sayısı 40 olduğundan örnek uzayın eleman sayısı $s(E) = 40$ olur.

Futbol oynayan öğrenci sayısı 21 olduğundan $s(F) = 21$ olup seçilen bir öğrencinin futbol oynama olasılığı $P(F) = \frac{s(F)}{s(E)} = \frac{21}{40}$ olur.

Basketbol oynayan öğrenci sayısı 12 olduğundan $s(B) = 12$ olup seçilen bir öğrencinin basketbol oynama olasılığı $P(B) = \frac{s(B)}{s(E)} = \frac{12}{40}$ olur.

Her iki oyunu oynayanların sayısı 8 olduğundan $s(F \cap B) = 8$ olup seçilen bir öğrencinin her iki oyunu da oynama olasılığı $P(F \cap B) = \frac{s(F \cap B)}{s(E)} = \frac{8}{40}$ olur.

Seçilen bir öğrenci iki oyunu da oynayabildiğinden bu olaylar ayrık olmayan olaylardır. O hâlde

$P(F \cup B) = P(F) + P(B) - P(F \cap B) = \frac{21}{40} + \frac{12}{40} - \frac{8}{40} = \frac{25}{40} = \frac{5}{8}$ bulunur.

ÖRNEK

İki zarın birlikte atılması deneyinde zarların üst yüzüne gelen sayıların

a) Aynı olması olasılığını bulunuz.

b) Toplamlarının 6 olması olasılığını bulunuz.

ÇÖZÜM

Hem birinci hem de ikinci zar için 6 durum olduğundan örnek uzayın eleman sayısı $s(E) = 6 \cdot 6 = 36$ olur.

a) İki zarın birlikte atılması deneyinde zarların üst yüzüne gelen sayıların aynı olması olayı A olsun.

$A = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$ ve $s(A) = 6$ olduğundan $P(A) = \dfrac{s(A)}{s(E)} = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$ olur.

b) İki zarın birlikte atılması deneyinde zarların üst yüzüne gelen sayıların toplamının 6 olması olayı B olsun. $B = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$ ve $s(B) = 5$ olduğundan $P(B) = \dfrac{s(B)}{s(E)} = \dfrac{5}{36}$ olur.

Örnek uzayın herhangi bir A olayının tümleyeni A' olmak üzere $P(A) + P(A') = 1$ olur.

ÖRNEK

Bir atıcının atış yaptığı hedefi vurma olasılığı $\dfrac{5}{7}$ ise hedefi vuramama olasılığını bulunuz.

ÇÖZÜM

Atıcının hedefi vurabilme olayı A olsun. Bu durumda vuramama olayı A' olur. Bir olayın olma olasılığı ile olmama olasılığının toplamı 1 olduğundan

$$P(A) + P(A') = 1 \Rightarrow \frac{5}{7} + P(A') = 1$$
$$\Rightarrow P(A') = 1 - \frac{5}{7}$$
$$\Rightarrow P(A') = \frac{2}{7} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

5 kız ve 4 erkekten oluşan bir arkadaş grubundan rastgele seçilen 3 kişinin en az birinin kız olma olasılığını bulunuz.

ÇÖZÜM

Örnek uzayın eleman sayısı toplam 9 kişi arasından 3 kişinin seçilme sayısı olduğundan $C(9,3) = 84$ olur. Seçilen 3 kişinin hepsinin erkek olması olayı A ise seçilen 3 kişinin en az birinin kız olması olayı A' olur.

$$P(A) + P(A') = 1 \Rightarrow \frac{C(4,3)}{C(9,3)} + P(A') = 1 \Rightarrow \frac{4}{84} + P(A') = 1$$
$$\Rightarrow P(A') = 1 - \frac{4}{84} = \frac{80}{84}$$
$$\Rightarrow P(A') = \frac{20}{21} \text{ olur.}$$

ÖRNEK

Boyları farklı 4 öğrenci bir çizgi boyunca rastgele sıraya giriyorlar. En kısa boylu öğrencinin en solda ve en uzun boylu öğrencinin en sağda olma olasılığını bulunuz.

ÇÖZÜM

Boyları farklı 4 öğrenci rastgele bir çizgi boyunca sıralanacağından örnek uzayın eleman sayısı $s(E) = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ olur.

En kısa öğrenci K, en uzun öğrenci U diğer iki öğrenci de A ve B ile gösterilirse istenilen sıra KABU veya KBAU şeklinde 2 farklı durumda olacaktır.

En kısa öğrencinin en solda ve en uzun öğrencinin en sağda olma olasılığı $\frac{2}{24} = \frac{1}{12}$ olur.

ÖRNEK

Bir pastaneye giden 7 arkadaşın dördü muzlu pasta, ikisi çikolatalı pasta, biri çilekli pasta siparişi veriyor. Siparişleri alan çalışan kimin ne istediğini şaşırıp pastaları rastgele dağıtıyor. Buna göre çalışanın siparişleri doğru şekilde dağıtma olasılığını bulunuz.

ÇÖZÜM

Aynı pastaların kendi arasında yer değiştirmesi farklı bir dağıtım değildir. Bu durumda örnek uzayın eleman sayısı 7 pastanın tekrarlı permütasyonlarının sayısıdır.

$s(E) = P(7;4,2,1) = \frac{7!}{4! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} = 105$ olur.

Buna göre çalışanın siparişleri doğru şekilde dağıtma durumunun sayısı $s(A) = 1$ olur. Bu durumda siparişlerin doğru dağıtılması olasılığı $P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{1}{105}$ olur.

ÖRNEK

5 matematik ve 6 coğrafya öğretmeni arasından rastgele seçilen 3 öğretmenin ikisinin matematik, birinin coğrafya öğretmeni olma olasılığını bulunuz.

ÇÖZÜM

5 matematik ve 6 coğrafya öğretmeni arasından yani 11 öğretmen arasından 3 öğretmen seçme işlemi yapılacağından örnek uzayın eleman sayısı $C(11,3) = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 165$ olur.

Seçilen 3 öğretmenin ikisinin matematik öğretmeni olması olayının eleman sayısı $C(5,2) = \frac{5 \cdot 4}{2!} = \frac{20}{2} = 10$, birinin coğrafya öğretmeni olma olayının eleman sayısı $C(6,1) = 6$ olur.

Bu durumda rastgele seçilen 3 öğretmenin ikisinin matematik, birinin coğrafya öğretmeni olma olasılığı

$\dfrac{C(5,2)\cdot C(6,1)}{C(11,3)}=\dfrac{10\cdot 6}{165}=\dfrac{60}{165}=\dfrac{4}{11}$ bulunur.

ÖRNEK

Selin ve Gülşah'ın da bulunduğu 5 kişilik bir arkadaş grubu yan yana rastgele oturarak fotoğraf çektireceklerdir.

a) Çekilen fotoğrafta Selin ve Gülşah'ın yan yana olma olasılığını bulunuz.

b) Çekilen fotoğrafta Selin ve Gülşah'ın yan yana olmama olasılığını bulunuz.

ÇÖZÜM

Toplam 5 kişinin sıralanma sayısı $5!=120$ olduğundan örnek uzayın eleman sayısı 120 olur.

a) Selin ile Gülşah yan yana olacağından Selin ve Gülşah 1 kişi gibi düşünülerek 3 arkadaşı ile birlikte toplamda 4 kişi varmış gibi işlem yapılabilir. Selin ile Gülşah da kendi arasında 2! farklı biçimde sıralanacağından tüm sıralanma sayısı $4!\cdot 2!=24\cdot 2=48$ olur. Bu durumda çekilen fotoğrafta Selin ve Gülşah'ın yan yana olma olasılığı $\dfrac{48}{120}=\dfrac{2}{5}$ olur.

b) **I. yol**

Çekilen fotoğrafların 48 durumunda Selin ve Gülşah yan yana olduğundan $120-48=72$ durumunda yan yana değildir. Bu durumda çekilen fotoğrafta Selin ve Gülşah'ın yan yana olmama olasılığı $\dfrac{72}{120}=\dfrac{3}{5}$ olur.

II. yol

Selin ve Gülşah'ın yan yana olma olayı A ise yan yana olmama olayı A' olur. Buradan

$$P(A)+P(A')=1\Rightarrow \frac{2}{5}+P(A')=1$$
$$\Rightarrow P(A')=1-\frac{2}{5}$$
$$\Rightarrow P(A')=\frac{3}{5} \text{ olur.}$$

ÖRNEK

5 evli çift arasından rastgele seçilen 2 kişinin evli çiftlerden biri olma olasılığını bulunuz.

ÇÖZÜM

Örnek uzayın eleman sayısı toplam 10 kişi arasından 2 kişinin seçim sayısı olan $s(E)=C(10,2)=45$ olur. 5 evli çift arasından rastgele seçilen 2 kişinin evli olma olayı Ç ise $s(Ç)=C(5,1)=5$ olur. Bu durumda 5 evli çift arasından rastgele seçilen 2 kişinin evli çiftlerden biri olma olasılığı $P(Ç)=\dfrac{s(Ç)}{s(E)}=\dfrac{5}{45}=\dfrac{1}{9}$ olur.

ALIŞTIRMALAR

1. Bir zarın havaya atılması deneyinde üst yüze gelen sayının asal sayı olma olasılığını bulunuz.

2. Bir zarın havaya atılması deneyinde üst yüze gelen sayının 2 den büyük olma olasılığını bulunuz.

3. Bir madenî para arka arkaya iki defa havaya atıldığında üste gelen yüzlerinin farklı olma olasılığını bulunuz.

4. Bir kolide bulunan 7 çoraptan 3 ü defoludur. Rastgele seçilen bir çorabın defolu olmama olasılığını bulunuz.

5. Soruyu çözme olasılığı $\frac{3}{4}$ olan bir öğrencinin soruyu çözememe olasılığını bulunuz.

6. Bir çift zar atıldığında üst yüze gelen sayıların toplamının asal sayı olma olasılığını bulunuz.

7. Bir torbada bulunan 7 özdeş bilyeden 4 ü sarı ve 3 ü mavidir. Bu torbadan rastgele seçilen üç bilyeden ikisinin sarı, birinin mavi olma olasılığını bulunuz.

8. Bir torbada 1 den 10 a kadar numaralandırılmış 10 top vardır. Buna göre bu torbadan çekilen bir topun numarasının 7 den küçük olma olasılığını bulunuz.

9. 3 farklı fizik ve 2 farklı matematik kitabı bir rafa dizilecektir. Fizik kitaplarının yan yana gelme olasılığını bulunuz.

10. 12 si kız olan 21 kişilik bir öğrenci grubundan rastgele seçilen birinin erkek öğrenci olma olasılığını bulunuz.

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

A) 1-6. sorularda boş bırakılan yerlere uygun sözcükleri ya da değerleri yazınız.

1. 4 farklı kitap düz bir rafa .... farklı şekilde dizilebilir.

2. 223335 rakamlarının yerleri değiştirilerek birbirinden farklı .... sayı yazılabilir.

3. 3 sarı, 4 mavi ve 5 beyaz özdeş bilyenin bulunduğu bir torbadan en az .... top çekilirse her üç renkten birer bilye kesinlikle çekilmiş olur.

4. 5 elemanlı bir kümenin 2 elemanlı alt kümelerinin sayısı .... dur.

5. Bir deneyin bütün çıktılarının kümesine o deneyin .... denir.

6. Olasılığı 0 olan olaylara .... denir.

B) Aşağıda numaralar ile verilen ifadeler ile harflerle verilen matematiksel ifadeleri eşleştirip eşleşmeleri alttaki kutulara yazınız.

7.

I. $\frac{5!+4!}{3!}$ — a) 1

II. $P(5,1)$ — b) 5

III. $P(4,2)$ — c) 6

IV. $C(4,2)$ — ç) 7

V. $C(9,8)$ — d) 9

e) 12

f) 24

I.	II.	III.	IV.	V.

C) Aşağıdaki açık uçlu soruların cevabını ilgili alana yazınız.

8. $P(n,2)+C(n,2)=30$ olduğuna göre n değerini bulunuz.

9. Aralarında Esma ve Hülya'nın da bulunduğu 6 kişi yan yana rastgele sıralanıyor. Esma ve Hülya'nın yan yana olmama olasılığını bulunuz.

Ç) Aşağıdaki çoktan seçmeli soruların doğru seçeneğini işaretleyiniz.

10. $\dfrac{P(n,3)}{P(n,2)} = 5$

olduğuna göre n kaçtır?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

11. Bir toplantıda herkes birbiriyle bir kez tokalaşacaktır.

Toplam 105 tokalaşma olduğuna göre toplantıda kaç kişi vardır?

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

12. 3 farklı matematik, 4 farklı tarih ve 2 farklı fizik kitabı, tarih kitapları yan yana olmak koşuluyla bir rafa kaç farklı şekilde dizilebilir?

A) $4!$ B) $9!$ C) $4! \cdot 6!$ D) $5! \cdot 6!$ E) $2! \cdot 3! \cdot 4!$

13. $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

kümesinin elemanları kullanılarak rakamları farklı 3 basamaklı kaç sayı yazılabilir?

A) 60 B) 70 C) 80 D) 90 E) 100

14. $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

kümesinin elemanları kullanılarak 4 basamaklı kaç çift sayı yazılabilir?

A) 375 B) 425 C) 480 D) 540 E) 580

15. $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

kümesinin elemanları kullanılarak rakamları farklı 3 basamaklı kaç çift sayı yazılabilir?

A) 48 B) 52 C) 62 D) 68 E) 75

16. 12 113 235

sayısındaki rakamların yerleri değiştirilerek 3 ile başlayıp 3 ile biten 8 basamaklı kaç sayı yazılabilir?

A) 60 B) 75 C) 80 D) 100 E) 120

17. 34 400

sayısındaki rakamların yerleri değiştirilerek 5 basamaklı kaç sayı yazılır?

A) 12 B) 16 C) 18 D) 22 E) 30

18. **7 farklı matematik kitabı arasından 3 matematik kitabı almak isteyen bir öğrenci kaç farklı seçim yapabilir?**

A) 12 B) 21 C) 35 D) 45 E) 52

19. $\binom{8}{3x-1}=\binom{8}{x+1}$

olduğuna göre x in alabileceği değerler toplamı kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

20. **İçinde 7 beyaz ve 6 kırmızı top bulunan kutudan 2 beyaz ve 3 kırmızı top kaç farklı şekilde seçilebilir?**

A) 120 B) 180 C) 240 D) 360 E) 420

21. $A=\{1,2,3,4,5,6\}$

kümesinin 2 elemanlı alt küme sayısı kaçtır ?

A) 15 B) 20 C) 25 D) 30 E) 35

22. $A=\{1,2,3,4,5,6\}$

kümesinin üç elemanlı alt kümelerinin kaçında 6 bulunmaz?

A) 10 B) 12 C) 16 D) 20 E) 22

23. $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$

kümesinin üç elemanlı alt kümelerinin kaçında 2 bulunur?

A) 6 B) 9 C) 12 D) 15 E) 18

24. $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$

kümesinin üç elemanlı alt kümelerinin kaçında 3 bulunur, 5 bulunmaz?

A) 8 B) 10 C) 12 D) 14 E) 16

25. Ahmet ve Mehmet'in de bulunduğu 6 kişilik bir gruptan 4 kişi seçilecektir.

Ahmet ve Mehmet bu 4 kişilik gruba kesin katılacağına göre bu seçim kaç değişik biçimde yapılabilir?

A) 6 B) 9 C) 12 D) 15 E) 18

26. 10 kişi; biri 2 kişilik, biri 3 kişilik ve biri de 5 kişilik olmak üzere üç ekibe kaç değişik şekilde ayrılabilir?

A) 5400 B) 4260 C) 2610 D) 2520 E) 326

27. İki zarın atılması deneyinde örnek uzayın eleman sayısı kaçtır ?

A) 2 B) 4 C) 9 D) 25 E) 36

28. Bir zar atılması deneyinde üst yüze tek sayı gelme olasılığı kaçtır ?

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{5}{6}$

29. İki zarın atılması deneyinde, zarlardan birinin diğerinden 3 fazla olma olasılığı kaçtır ?

A) $\frac{1}{36}$ B) $\frac{1}{12}$ C) $\frac{1}{9}$ D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{1}{2}$

30. İki zarın aynı anda atılması deneyinde zarların birinin tek sayı diğerinin çift sayı gelme olasılığı kaçtır ?

A) $\frac{17}{36}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{19}{36}$ D) $\frac{10}{18}$ E) $\frac{7}{12}$

31. 4 kız ve 3 erkek arasından 2 kişi seçilecektir. **Seçilen 2 kişinin de kız olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{2}{7}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{7}{12}$ E) $\frac{6}{7}$

32. $A = \{a, b, c, d, e\}$

kümesinin alt kümelerinden biri seçiliyor. **Seçilen bu kümenin 2 elemanlı bir küme olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{5}{8}$ C) $\frac{5}{16}$ D) $\frac{7}{16}$ E) $\frac{11}{32}$

33. İki arkadaşın haftanın farklı günlerinde doğmuş olma olasılığı kaçtır?

A) 1 B) $\frac{6}{7}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{2}{7}$ E) $\frac{1}{7}$

34-37. soruları aşağıda verilen metne göre cevaplandırınız.

Bir torbada 1 den 12 ye kadar numaralandırılmış 12 özdeş top vardır.

34. Torbadan çekilen bir topun üzerindeki sayının 5 ten küçük olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

35. Torbadan çekilen bir topun üzerindeki sayının asal sayı olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{5}{12}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{3}$

36. Torbadan çekilen bir topun üzerindeki sayının tek sayı olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{5}{12}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{2}$

37. Torbadan çekilen bir topun üzerindeki sayının 9 dan büyük veya çift sayı olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{5}{6}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{7}{12}$ E) $\frac{1}{2}$

38-41. soruları aşağıda verilen cümleye göre cevaplandırınız.

$A=\{1,2,4\}$ ve $B=\{0,3,5,6,7,8,9\}$ kümeleri veriliyor. Sedat bilgisayarına A ve B kümesinin elemanları ile 5 haneli bir şifre belirlemek istiyor.
Sedat belirleyeceği şifrenin birinci, üçüncü ve beşinci hanelerinde A kümesinin diğer hanelerinde B kümesinin elemanlarını kullanacaktır.
Buna göre

38. Sedat kaç farklı şifre oluşturabilir?

39. Her hanesi farklı rakam olmak üzere kaç farklı şifre oluşturulabilir?

40. 4 e bölünebilen bir sayı olacak şekilde kaç farklı şifre oluşturabilir?

41. Yazılabilecek tüm şifreler içinden rastgele bir şifre seçildiğinde bu şifrenin 1 0 2 8 4 **olma olasılığı kaçtır?**

Veri Cevap Anahtarı

25. Sayfa
Alıştırmalar

1. a) 6 b) 5 c)5
2. 13
3. 9
4. 3
5. 13
6. 540
7. 108
8. Singapur
9. Japonya
10. 80
11. $2\sqrt{6}$

38. Sayfa
Alıştırmalar

1. 105
2. Çarşamba
3. Perşembe
4. 75
5. 2
6. 50
7. 60
8. B, 30
9. 10
10. 120
11. 200
12. $\frac{3}{4}$
13. 80
14. 120
15. 112
16. 108
17. $\frac{3}{4}$

40. Sayfa
Ölçme ve Değerlendirme

1. 9
2. 3
3. 13
4. 12
5. 0
6.

Aritmetik ortalama	Ortanca (Medyan)	Tepe değer (Mod)	Açıklık
10	8	8	11
6	6	yok	8
11	12	12 ve 14	10

7. 14
8. 4
9. Sarı, 8
10. 44
11. C
12. D
13. C
14. D
15. B
16. C
17. E
18. D
19. B
20. E
21. D
22. B
23. E
24. E
25. E
26. E
27. C
28. C
29. A
30. C
31. D
32. B
33. A

Sayma ve Olasılık Cevap Anahtarı

55. Sayfa
Alıştırmalar

1. 210
2. 20
3. 216
4. 120
5. 108
6. 120
7. 100
8. 48
9. 30
10. 34
11. $\frac{1}{6}$
12. $\frac{35}{4}$
13. 4

62. Sayfa
Alıştırmalar

1. 5
2. 5
3. 8!
4. $6! \cdot 3!$
5. $5! \cdot 3!$
6. $3! \cdot 4! \cdot 5! \cdot 6!$
7. 240
8. 48
9. $\frac{9!}{3! \cdot 2!}$
10. 140
11. 30
12. $\frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 5!}$

68. Sayfa
Alıştırmalar

1. 35
2. 15
3. 15
4. 32
5. 57
6. 10
7. 10
8. 6
9. 30
10. 12
11. 66
12. 105

80. Sayfa
Alıştırmalar

1. $\frac{1}{2}$
2. $\frac{2}{3}$
3. $\frac{1}{2}$
4. $\frac{4}{7}$
5. $\frac{1}{4}$
6. $\frac{5}{12}$
7. $\frac{18}{35}$
8. $\frac{3}{5}$
9. $\frac{3}{10}$
10. $\frac{3}{7}$

81. Sayfa
Ölçme ve Değerlendirme

1. 24
2. 60
3. 10
4. 10
5. örnek uzay
6. imkânsız olay
7. I -f II-b III -e IV-c V-d
8. 5
9. $\frac{2}{3}$
10. C
11. D
12. C
13. E
14. D
15. B
16. A
17. C
18. C
19. B
20. E
21. A
22. A
23. D
24. B
25. A
26. D
27. E
28. C
29. D
30. B
31. A
32. C
33. B
34. D
35. A
36. E
37. D
38. 1323
39. 252
40. 441
41. $\frac{1}{1323}$

SÖZLÜK

-A-

aritmetik ortalama : Veri grubunda bulunan verilerin toplamının veri sayısına bölünmesi ile elde edilen değer.

ayrık olay : Kesişimleri boş küme olan olaylar.

ayrık olmayan olay : Kesişimi olan olaylar.

-B-

basit olay : Bir tek çıktısı olan ve kendisinden başka olaylara ayrıştırılamayan olaylar.

-Ç-

çıktı : Örnek uzayın bir elemanı veya bir deneyin olası sonuçlarından her biri.

çizgi grafiği : Verilerin analitik düzleme aktarılıp oluşan noktaların çizgilerle birleştirilmesi sonucu oluşan grafik.

-D-

daire grafiği : Veri grubunun bütün içerisindeki oranını belirtmek için dairenin dilimlere ayrılarak gösterildiği grafik türü.

deney : Kontrollü olaylar dizisinden belli olmayan sonuçlara ulaşma süreci.

-F-

faktöriyel : 1 den n ye kadar olan ardışık tam sayıların çarpımı.

-G-

grafik : Ölçme sonucunda elde edilen verilerin çizgi, sütun vb. farklı şekillerle ifade edilmesi.

-İ-

imkânsız olay : Gerçekleşme olasılığı olmayan olay.

-K-

kesikli veri : Sonlu veya sayılabilir belli bir aralıkta her değeri alamayan veriler.

kesin olay : Olma olasılığı 1 olan olay.

kombinasyon : Bir nesne grubu içerisinden sıra gözetmeksizin yapılan seçimler.

SÖZLÜK

-M-

medyan : Veriler sıralandığında veri sayısı tek ise ortadaki terim, çift ise ortadaki iki terimin aritmetik ortalaması.

merkez açı : Köşesi çemberin merkezinde bulunan açı.

merkezi eğilim ölçüleri : Tepe değer, ortanca ve aritmetik ortalama değerleri.

merkezi yayılım ölçüleri : Terimlerin yakınlık veya uzaklığını belirten standart sapma ve açıklık değerleri.

mod : Veri grubunda en çok tekrar eden değer.

-O-

olasılık : Bir olayın olabilirlik derecesinin 0 ile 1 arasındaki bir gerçek sayıyla gösterilmiş biçimi.

olay : Bir deney ya da bir oluşumdan elde edilebilecek tüm sonuçların bir alt kümesi.

olayın tümleyeni : Bir evrensel kümenin herhangi bir alt kümesinin tümleyeni bu alt kümeye ait olmayıp evrensel kümeye ait olan tüm elemanların kümesidir.

-Ö-

örnek uzay : Bir deneyin olası tüm sonuçlarının kümesi.

-P-

permütasyon : Bir küme elemanlarının belli bir sıraya göre dizilişlerinin her biri.

-S-

standart sapma : Bir sayı dizisindeki elemanların aritmetik ortalamaya yakın olup olmadığı hakkında bilgi veren merkezi yayılım ölçüsü.

-V-

veri : Belli konularda ölçüm, sayım, deney, gözlem vb. yoluyla elde edilen toplanmış ve çözümlenmiş bilgiler.

KAYNAKÇA

- Türk Dil Kurumu (1983). Matematik Terimleri Sözlüğü. Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları.
- Türk Dil Kurumu (2000). Geometri. Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları.
- Türk Dil Kurumu (2012). Türkçe Sözlük. Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları.
- Türk Dil Kurumu (2012). Yazım Kılavuzu. Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları.
- Çimen, C. vb. (2012). Şifrelerin Matematiği Kriptografi. Sayfa:29-30. Ankara: ODTÜ Yayıncılık.
- İslam Ansiklopedisi Cilt 30, Sayfa: 321
- İslam Ansiklopedisi Cilt 35, Sayfa:353
- T.C. Millî Eğitim Bakanlığı (2020) Meslekî ve Teknik Eğitim Merkezleri Matematik Dersi 9, 10, 11 ve 12. Sınıflar Öğretim Programı.

GENEL AĞ KAYNAKÇASI

- https://sifiratik.gov.tr/sifir-atik/sifir-atik-nedir *(Erişim Tarihi ve Saati: 24.11.2022, 11.16)*
- https://ergenekonilkokulu.meb.k12.tr/icerikler/gidani-koru-sofrana-sahip-cik_11193498.html *(Erişim Tarihi ve Saati : 24.11.2022, 11.16)*

GÖRSEL KAYNAKÇASI

Kitabın görsel kaynakçasına ulaşmak için karekodu okutabilirsiniz. Karekodun okutulamaması durumunda aşağıdaki linki kullanarak kitabın görsel kaynakçasına ulaşabilirsiniz.

» http://kitap.eba.gov.tr/karekod/Kaynak.php?KOD=1777